

I. Vektoren

I.1. Geometrische Objekte der Physik: Skalare, Vektoren, Tensoren

- physikal. Größen: Maßzahl, Maßeinheit
- Erfahrung: Wir leben in einer 3+1-dimensionalen Welt
3 Raumdimensionen + Zeit

Wichtiges Grundelement:

Charakterisierung des Ortes und der Zeit eines Punktes

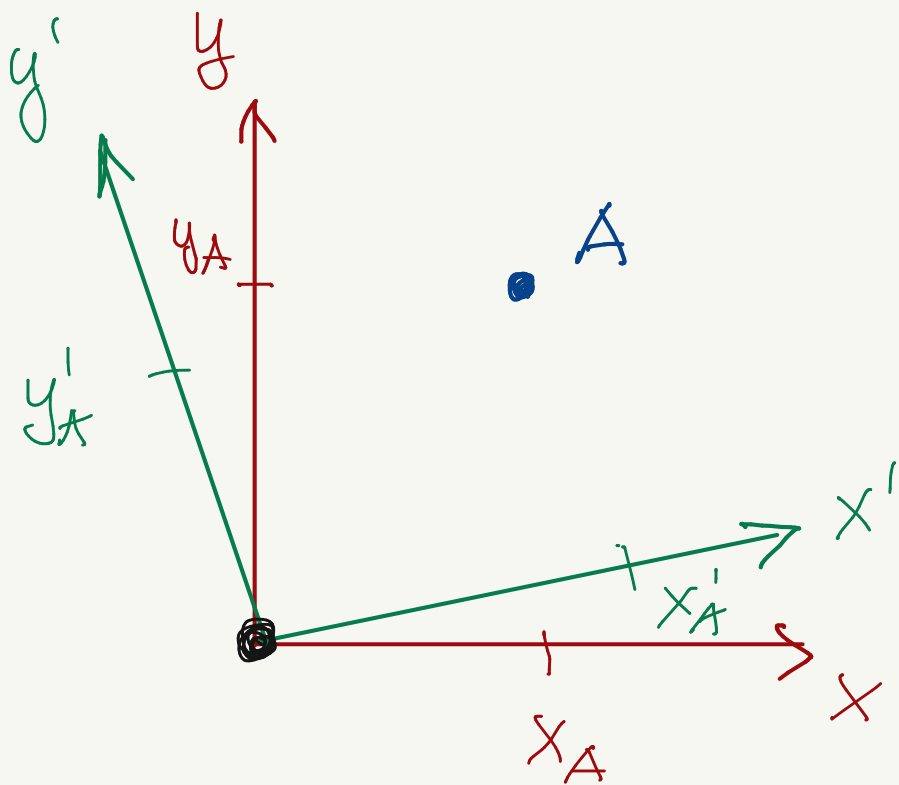
↳ komplizierter

↳ einfach
Zahl ✓

Skalar

nach Festlegung der Maßeinheit nur
durch eine Zahl festgelegt (z.B. Zeit relativ zu Zeit Nullpunkt)

Wie sieht es mit dem Ort aus?

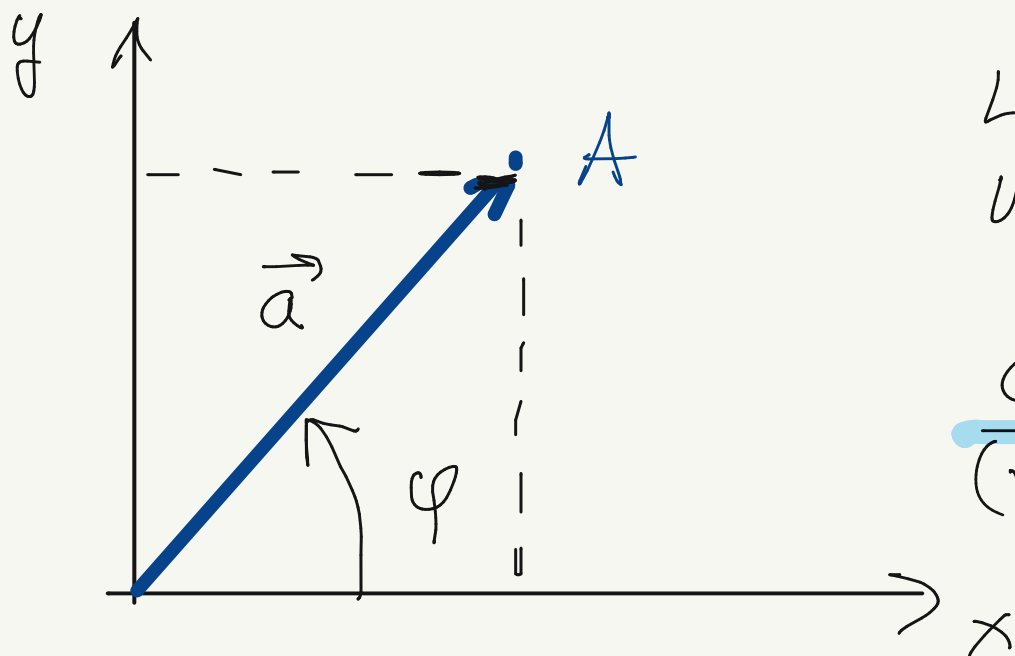


Ort nur relativ zur
Karte festgelegt $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix}$

Karte:

Koordinatensystem mit
Bezugspunkt (Koordinatenursprung)

Problem: Beschreibung physikalischer Größen / Gesetze sollte
nicht vom Koordinatensystem abhängen



Lage von A relativ zum Ursprung

Ortvektor von A
(relativ zum Ursprung)

kann auch als Verschiebung aus dem Ursprung definiert werden

Bezeichnung

$\vec{a}$

(i) Länge von $\vec{a}$ = Länge der Verschiebungstrecke $a = |\vec{a}|$

(ii) Richtung von $\vec{a}$ z.B. Winkel gegen x Achse

Vektor

Größe die nach Festlegung einer Maßeinheit durch Betrag und Richtung festgelegt ist

- hat absolute Bedeutung unabhängig vom Koordinatensystem
- erlaubt Formulierung physikalische Gesetze unabhängig vom Koordinatensystem

z.B.

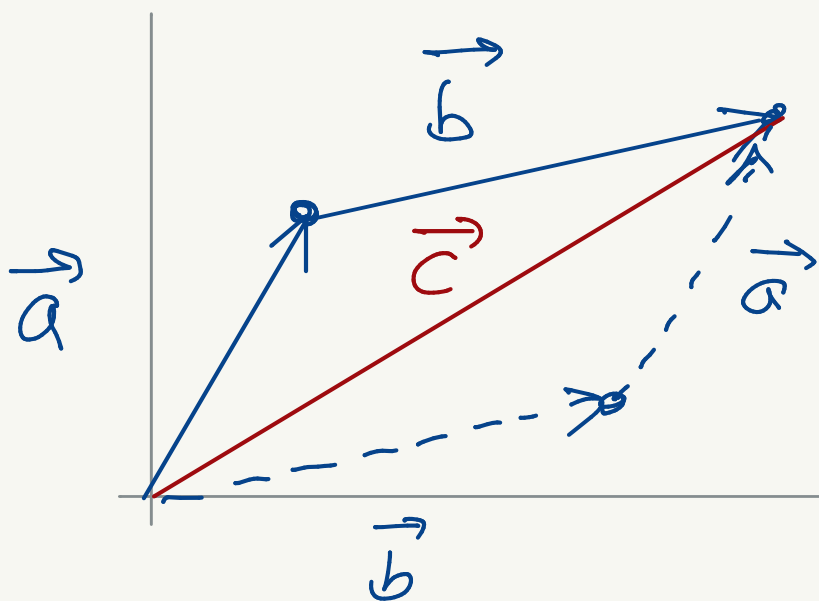
$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

später: Tensoren

I.2 Elementare Rechenoperationen mit Vektoren

(A) Addition von Vektoren

Beispiel Verschiebungsvektoren: Hierfür wird die Ausdehnung von Verschiebungen



$$(i) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$$

kommutativ

$$(ii) \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

assoziativ

(B) Multiplikation mit reeller Zahl

$$(iii) \quad \vec{b} = \lambda \vec{a}$$

- Richtung von $\vec{b} \hat{=} \vec{a}$
- Länge von $b = |\vec{b}| = \lambda |\vec{a}|$

ist assoziativ, kommutativ und distributiv

$$(iv) \quad (\alpha\beta) \vec{a} = \alpha(\beta \vec{a}) = \beta(\alpha \vec{a})$$

$$(v) \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$$

elementare Folgerungen

- $\alpha = 0$ ergibt Nullvektor $\vec{0}$; Länge 0, keine Richtung
 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

- $\alpha = -1$ ergibt $-\vec{a}$; Länge a , Richtung umgekehrt
 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

- $\alpha = \frac{1}{|\vec{a}|}$ ergibt Einheitsvektor $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
 $|\hat{a}| = 1$

$\Rightarrow$ postulieren dies als allg. Eigenschaft von Vektoren

(C) Vektorraum

Rechenregeln definieren einen abstrakten Vektorraum
oder linearen Raum

Menge aller Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ für die gilt:

(i)

$$\vec{a}, \vec{b} \in V \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in V \quad \exists \text{ "Addition"}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Kommutativität

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

Assoziativität

$$\exists \vec{0} \text{ mit } \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$\exists$ neutrales Element

$$\exists \vec{b} = -\vec{a} \text{ mit } \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$$

$\exists$ inverses Element

Abelsche Gruppe

(ii)

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{a} \in V &\Rightarrow \alpha \vec{a} \in V && \exists \text{ Multiplikation} \\ \alpha(\beta \vec{a}) &= \beta(\alpha \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a} && \text{Kommutativit\"at} \\ &&& \text{Assoziativit\"at} \\ \alpha(\vec{a} + \vec{b}) &= \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b} && \text{Distributivit\"at} \\ (\alpha + \beta) \vec{a} &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{a} \\ \exists 1 \text{ mit } 1 \cdot \vec{a} &= \vec{a} && \exists \text{ neutraler Element} \end{aligned}$$

(i) + (ii) linearer Raum (Vektorraum)

Def: Sei $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\}$ Menge von Vektoren, dann heißt die Menge M aller Linearkombinationen

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m = \sum_{j=1}^m \alpha_j \vec{x}_j$$

mit beliebigen $\alpha_j \in \mathbb{R}$ lineare Hülle von B

$\Rightarrow$

M ist ein Vektorraum

Bspl:

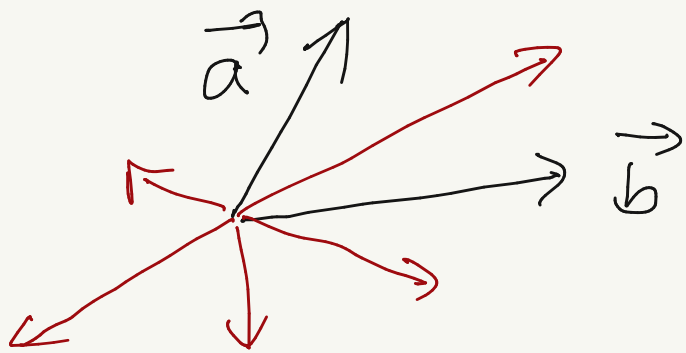
(i) $B = \{\vec{a}\} \Rightarrow M = \{\alpha \vec{a}, \alpha \in \mathbb{R}\}$

alle Vektoren parallel zu $\vec{a}$

(ii) $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ und $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ auch hier

$\Rightarrow M = \{\alpha \vec{a}, \alpha \in \mathbb{R}\}$

(iii) $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ und $\vec{b} \neq \lambda \vec{a}$



jetzt alle Ortsvektoren
in der Ebene!

Falls sich einer oder mehrere der Vektoren in B durch die anderen ausdrücken lassen (Beispiel (ii)), dann heißt $\{\vec{x}_i\} = B$ linear abhängig, sonst linear unabhängig

Falls alle $\vec{x}_i$ in B linear unabhängig, heißt B Basis des Vektorraums V

Minimale Zahl linear unabhängiger Vektoren
= Dimension von V $d = \dim \{V\}$

Bspl.: Bspl. (iii) von oben

$B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ ist Basis in Ebene ($\mathbb{R}^2$)

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

Aus jeder Basis kann eine normierte Basis gewonnen werden (Länge aller Basisvektoren = 1)

→ abstrakter Vektorbegriff erlaubt uns physikalische Gesetze unabhängig vom Koordinatensystem zu formulieren

I.3 Skalar- und Vektorprodukt

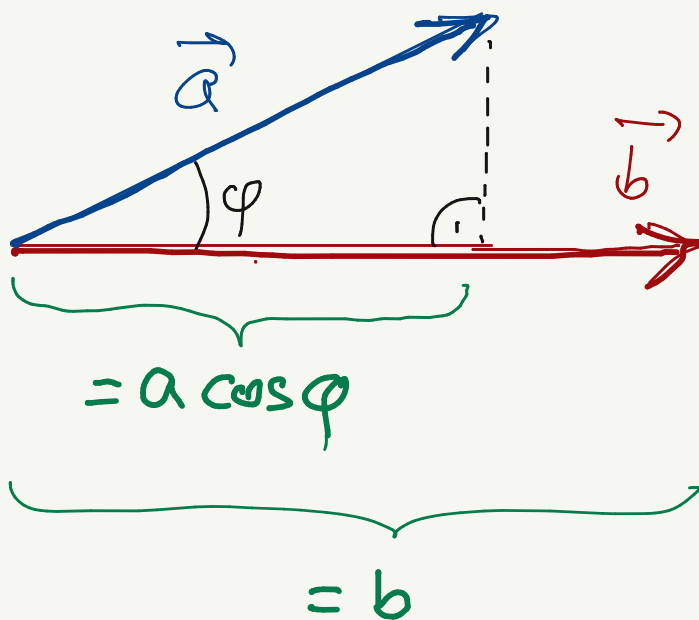
(A) Skalarprodukt

lässt sich für viele Vektorräume definieren,

hier: Vektoren, Matrizen und analoge

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv ab \cos \varphi$$

$$\varphi \angle (\vec{a}, \vec{b})$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\alpha (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b})$$

gilt auch
für andere
Vektorräume

Schwarze Ungleichung

$$-ab \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq ab$$

es gilt: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$

$$\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$$

- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen orthogonal, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen parallel, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$
- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen anti-parallel, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$

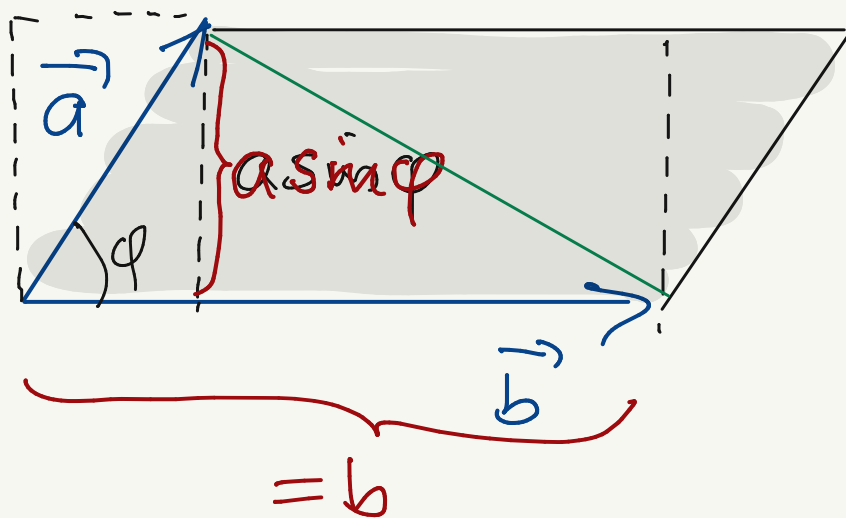
← Mo. 26.10.

(B) Vektorprodukt

gibt es nur für Vektoren im $\mathbb{R}^3$!

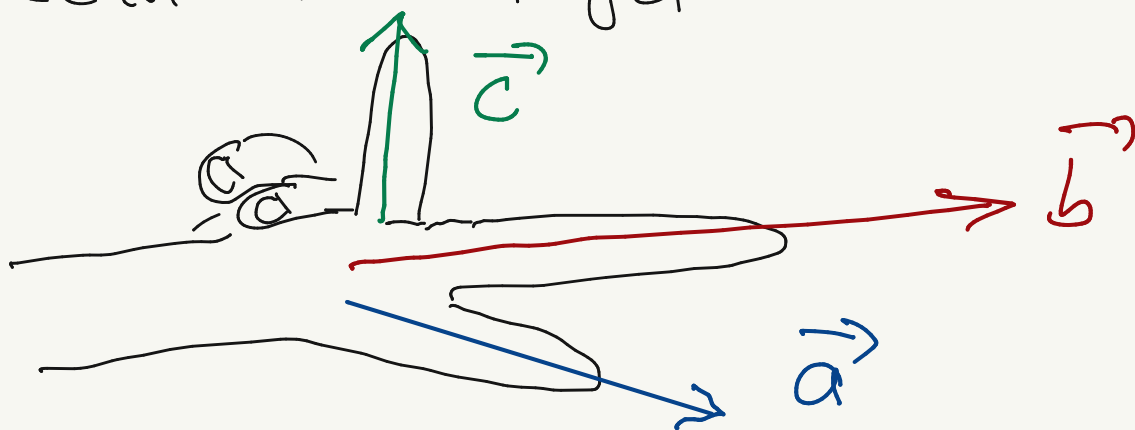
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

(i) $|\vec{c}| = ab \sin \varphi$ $\varphi \angle (\vec{a}, \vec{b})$



$\Rightarrow |\vec{c}| \hat{=} \text{Fläche}$
(oder doppelte
Fläche des Dreieck)

(ii) Richtung von $\vec{c}$: orthogonal zu allen Vektoren die durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt werden
+ Rechte Hand Regel



- Eigenschaften

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} && \text{anti-kommutativ} \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} && \text{distributiv} \\ \alpha (\vec{a} \times \vec{b}) &= (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) && \text{homogen}\end{aligned}$$

- falls $\vec{a}$ orthogonal zu $\vec{b}$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

- falls $\vec{a}$ parallel (anti-parallel) zu $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\sin 0^\circ = 0$$

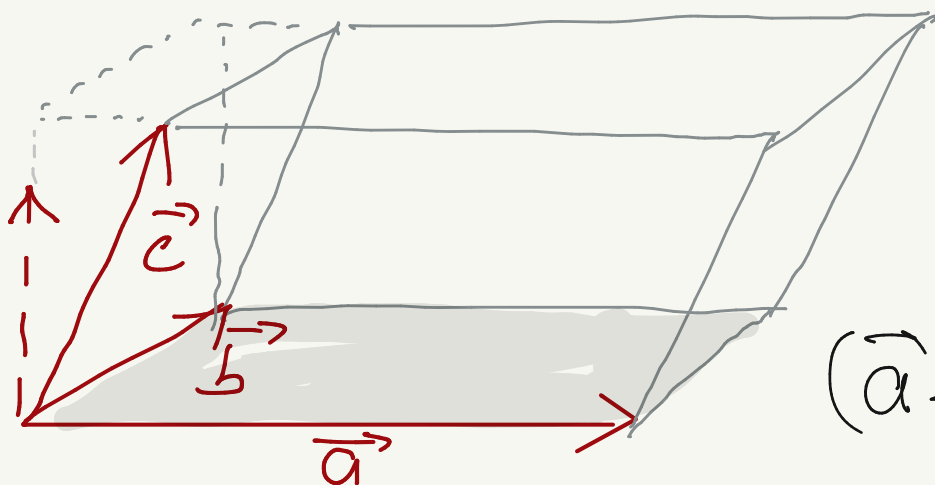
(c) Skalarprodukt

gibt es nur für Vektoren in $\mathbb{R}^3$
wichtige Kombination aus Vektor und Skalarprodukt

$$v = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \in \mathbb{R}$$

anschauliche Bedeutung: Volumen des durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds ("Spat")

$$\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}$$



$$F = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = F \hat{e}_u$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = F \hat{e}_u \cdot \vec{c} = F \cdot \text{height} = V$$

Eigenschaften

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

zyklische Vertauschung

I.4 orthogonale Koordinatensysteme

Def.: Eine Basis aus paarweise orthogonalen auf 1 normierten Vektoren heißt Orthonormalbasis

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_m \quad \text{z.B.} \quad \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

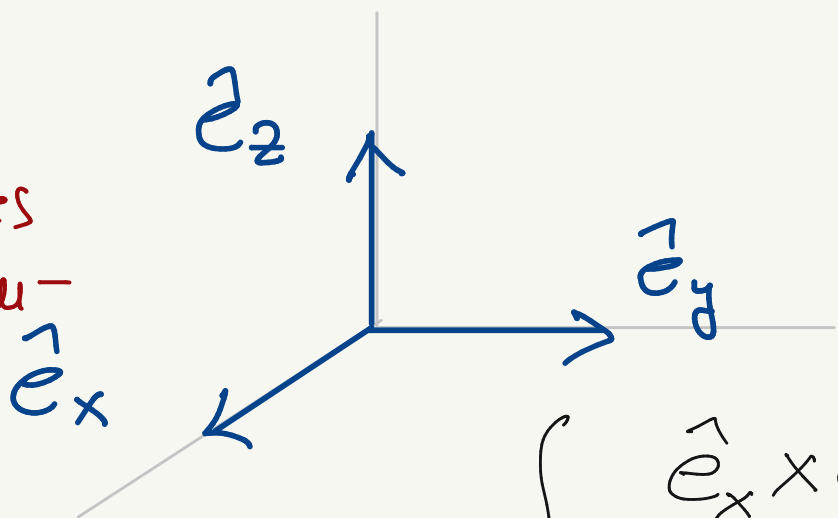
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 \text{ etc}$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Kronecker symbol

im $\mathbb{R}^3$

kartesisches
Koordinaten-
system



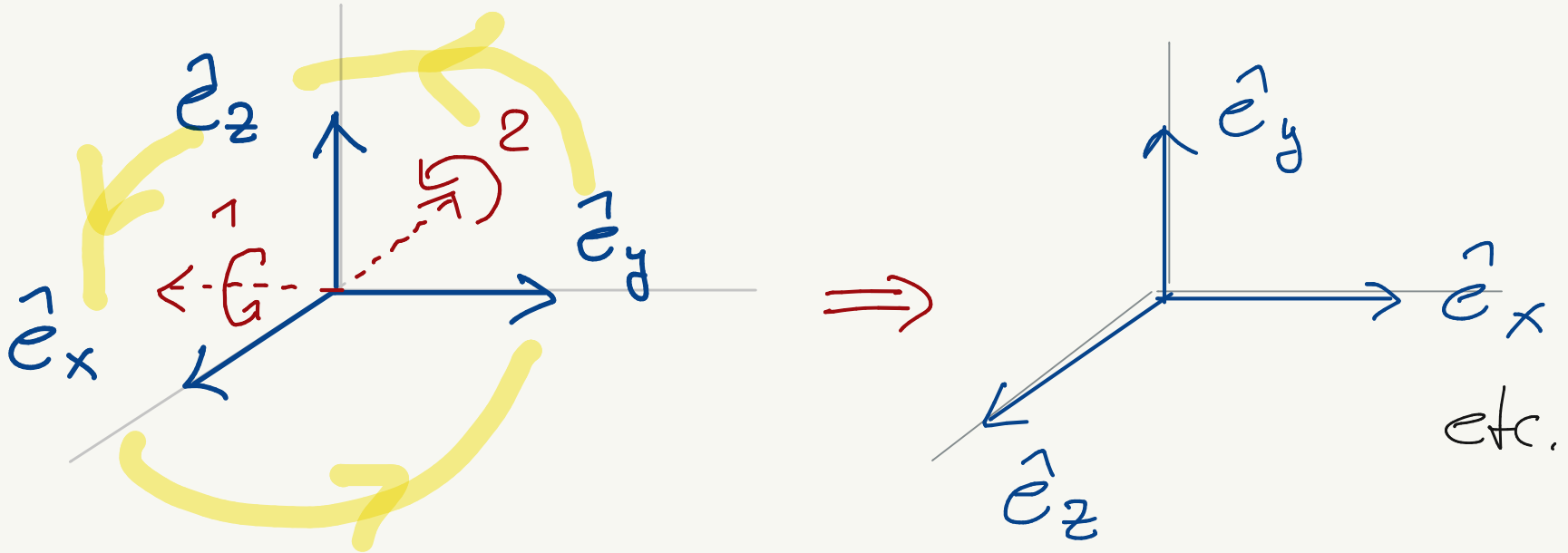
zyklisch

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \end{array} \right.$$

Rechtssystem

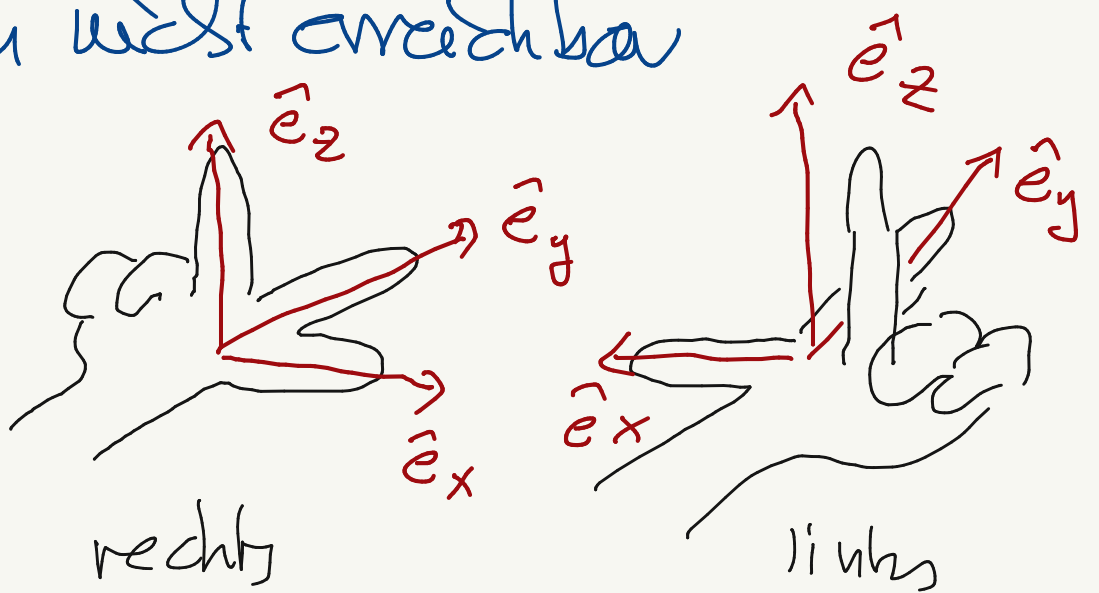
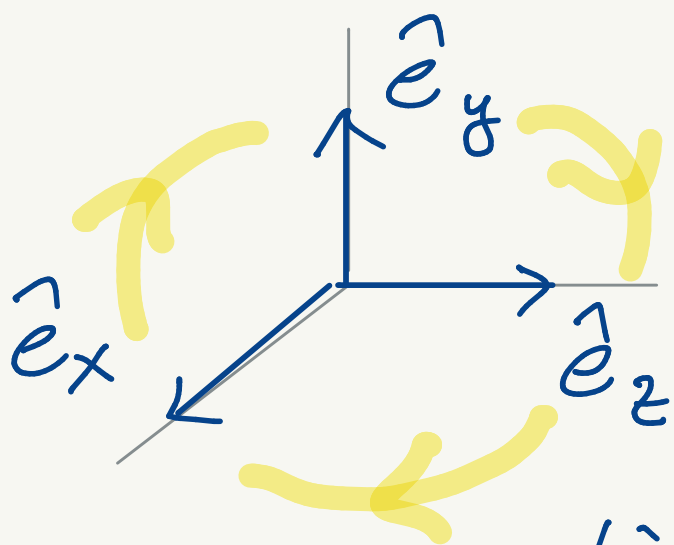
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$$



Rechtssystem

aber durch Drehungen nicht erreichbar



Linkssystem

$\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ Basis $\Rightarrow$

Der Vektor $\vec{a}$ kann in Einheitsvektoren zerlegt werden

$$\vec{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$$

a_i heißen Komponenten von $\vec{a}$ im kartesisches Koordinatensystem

Kurzschreibweise $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{e}_i$

eindeutige Zuordnung

$$\vec{a} \iff (a_x, a_y, a_z) \text{ oder } \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

- Alle Rechenregeln der Addition von Vektoren und der Multiplikation mit reellen Zahlen übertragen sich auf die Komponenten

$$\vec{a} \hat{=} (a_1, a_2) \quad \vec{b} \hat{=} (b_1, b_2)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{a} + \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) + (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \\ &= (a_1 + b_1) \vec{e}_1 + (a_2 + b_2) \vec{e}_2 = \vec{c} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{c} \hat{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lambda \vec{a} &= \lambda (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) = (\lambda a_1) \vec{e}_1 + (\lambda a_2) \vec{e}_2 \\ &= \vec{c} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{c} \hat{=} (\lambda a_1, \lambda a_2)$$

- Komponentendarstellung des Skalarproduktes

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2)$$

$$= \underline{a_1 b_1} \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{=1} + a_1 b_2 \cancel{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{=0}$$

$$+ a_2 b_1 \cancel{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{=0} + \underline{a_2 b_2} \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_{=1}$$

im Allgemeinen für orthogonale Basis

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots$$

Betrag eines Vektors

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

- Komponentendarstellung des Vektorproduktes

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad + \text{zyklische Vertauschung}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \times (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1)}_{=0} + a_1 b_2 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}_{=\vec{e}_3} + a_1 b_3 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)}_{=-\vec{e}_2}$$

$$+ a_2 b_1 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)}_{=-\vec{e}_3} + a_2 b_2 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2)}_{=0} + a_2 b_3 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}_{=\vec{e}_1}$$

$$+ a_3 b_1 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1)}_{=\vec{e}_2} + a_3 b_2 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)}_{=-\vec{e}_1} + a_3 b_3 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3)}_{=0}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3$$

• Levi-Cevita Symbol

$$\varepsilon_{ijk}$$

$$i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

$$\varepsilon_{123} = 1 \quad + \text{vollst\"andig antisymmetrisch}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} \quad (\Rightarrow \varepsilon_{iik} = -\varepsilon_{iik} = 0)$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$$

d.h.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & ijk \text{ zyklisch} \\ -1 & ijk \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

damit

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$

• Darstellung als Determinante (für die die eine Determinante schon kennen)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Rechenregel für Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2$$

$$- a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

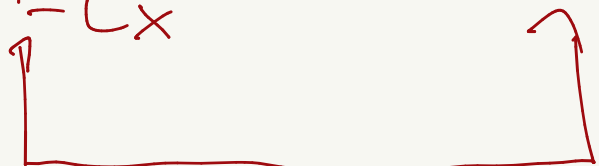
Spatprodukt

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{c} \cdot \{ \vec{e}_x a_y b_z + \vec{e}_y a_z b_x + \vec{e}_z a_x b_y - \dots \}$$



$\vec{c}_x$



$\vec{c}_y$

$$\Rightarrow \text{ersehe } \begin{matrix} \vec{e}_x \leftrightarrow c_x \\ \vec{e}_y \leftrightarrow c_y \\ \vec{e}_z \leftrightarrow c_z \end{matrix}$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Das doppelte Vektorprodukt

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ist wieder Vektor

man sieht

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

z.B. $\vec{a} = \hat{e}_x$ $\vec{b} = -\hat{e}_x$ $\vec{c} = \hat{e}_y$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = -\hat{e}_z$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \hat{e}_x \times (-\hat{e}_z) \\ &= \hat{e}_y \end{aligned}$$

Es gilt die "bac-cab" Regel

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \underbrace{\vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c})}_{\text{Zahl}} - \underbrace{\vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})}_{\text{Zahl}}$$

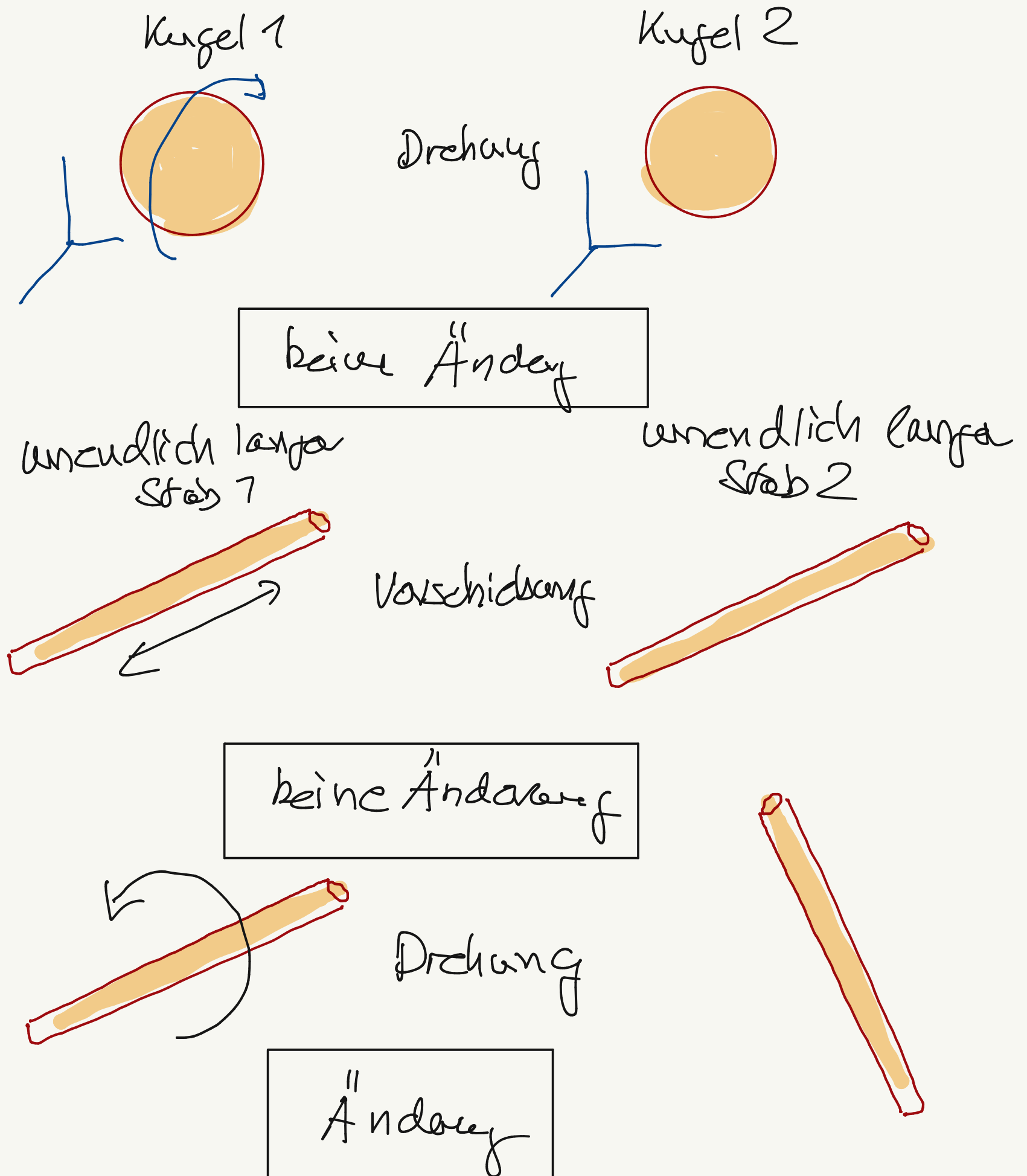
← Di. 27.10.2020

↙ nur Zusatzinfo

polare und axiale Vektoren

In der Physik wird es von besonderem Interesse sein zu fragen durch welche Eigenschaften sich zwei Systeme unterscheiden die durch einfache Transformationen in Raum und Zeit auseinander hervorgehen.

Bspl:



relevante Transformationen

- Translation in der Zeit
- Translation im Ort
- Drehung im Ort
- Raumspiegelung $\rightarrow$ Skalare

polare Vektoren

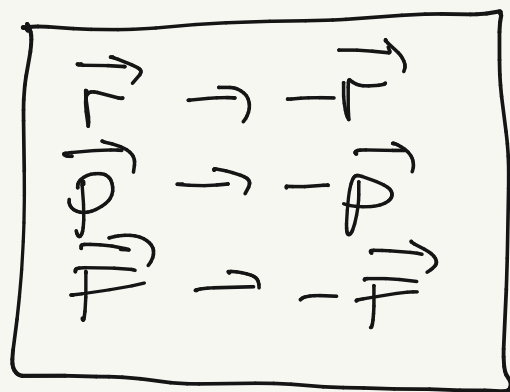
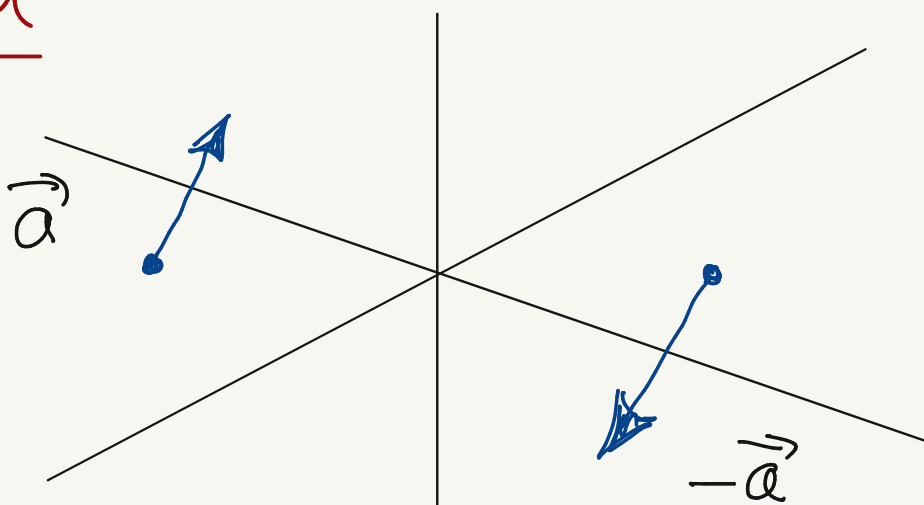
axiale Vektoren

Skalare

bleiben gleich

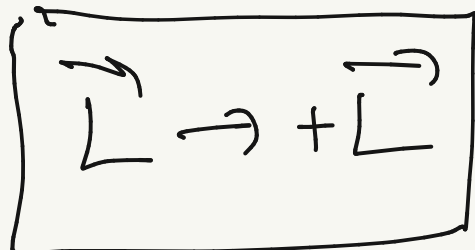
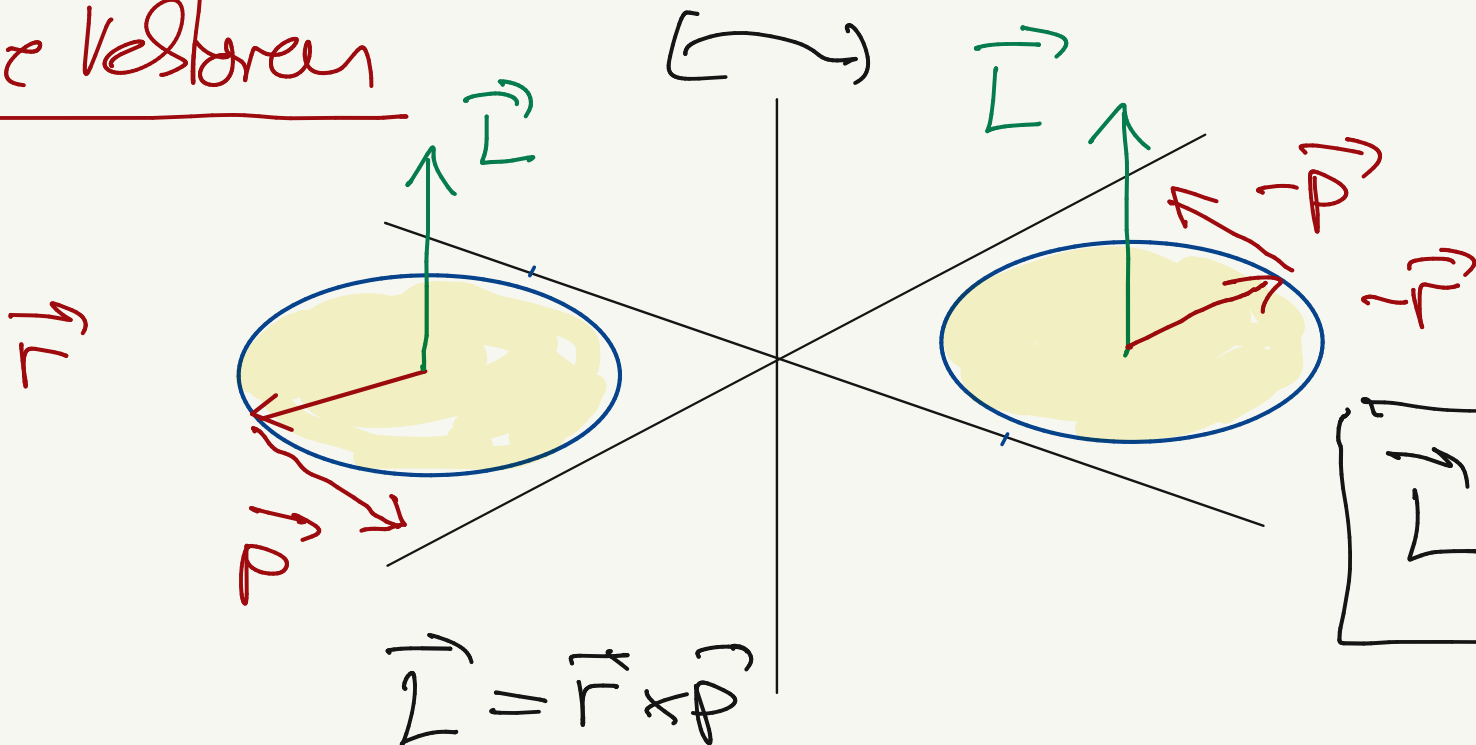
$\frac{m}{1}$

polare Vektoren



zwei Systeme die sich durch Raumspiegelung unterscheiden

axiale Vektoren



Vektoren und Koordinatentransformationen *

Nicht zu verwechseln mit der Diskussion von eben bei der wir zwei verschiedene Systeme verglichen haben, die sich nur durch eine Raum-Zeit Transformation unterscheiden ist die Frage nach der Koordinatentransformation

Zur Erinnerung: Wir hatten den abstrakten Begriff "Vektor" eingeführt um physikalische Gesetze unabhängig vom Koordinatensystem (Wahl der Basisvektoren) zu formalisieren!

z.B.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

man ist bei Wahl eines Koordinatensystems

$$\vec{r} \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

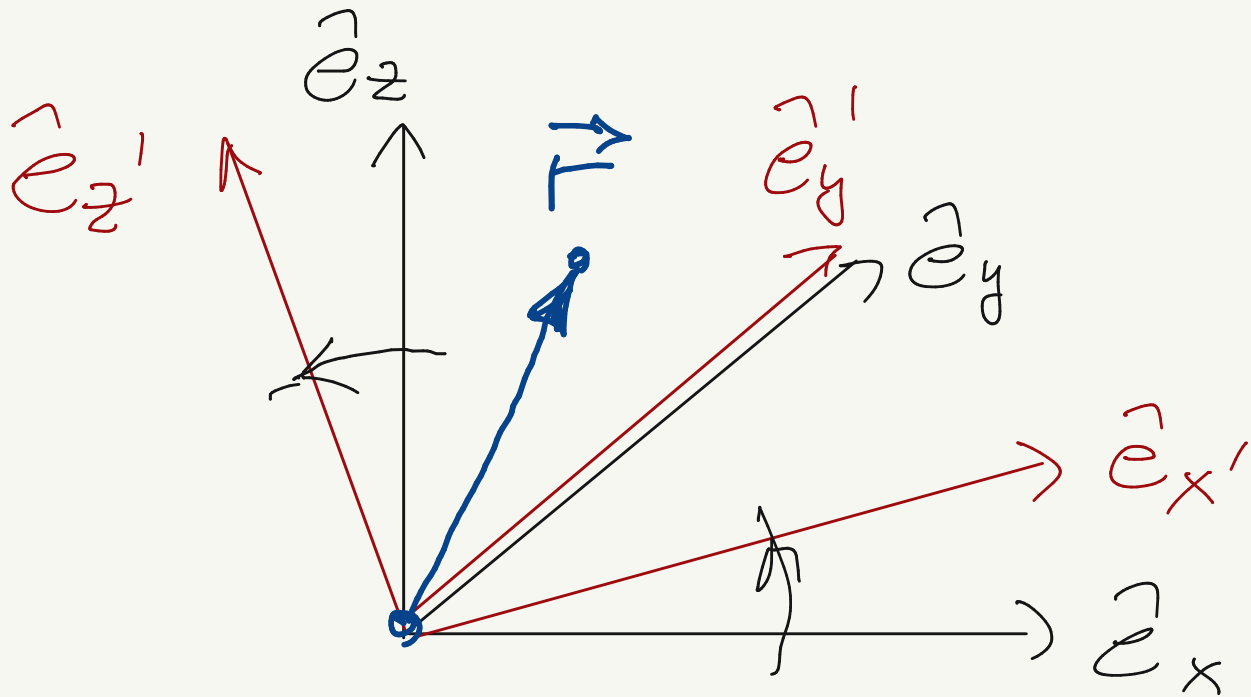
$$\vec{F} \hat{=} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z$$

- Wechsel des Koordinatensystems (z.B. Drehung)



Koordinatentransformation

$$\vec{r} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

nun soll auch im neuen Koordinatensystem gelten

$$m \frac{d^2}{dt^2} x' \stackrel{!}{=} F_{x'} \quad m \frac{d^2}{dt^2} y' \stackrel{!}{=} F_{y'} \quad m \frac{d^2}{dt^2} z' \stackrel{!}{=} F_{z'}$$

geht nur falls

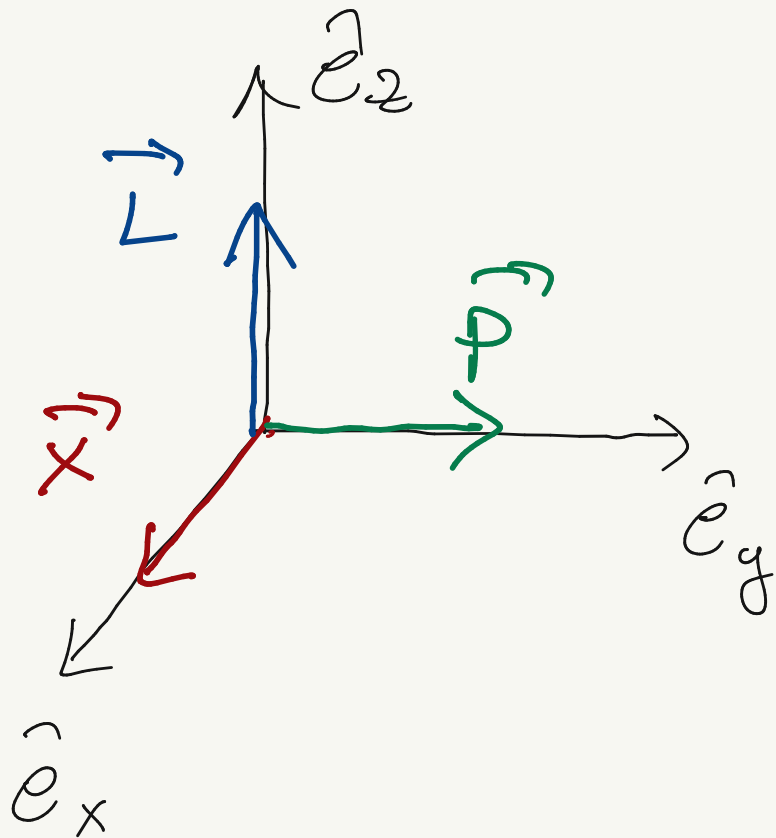
$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_{x'} \\ F_{y'} \\ F_{z'} \end{pmatrix} \quad \text{dieselbe Transformation wie} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

physikalische Vektoren zeichnen sich zusätzlich durch folgende Eigenschaft aus:

Die Komponenten eines Vektors (z.B. Kraft) transformieren sich bei einer Koordinatentransformation wie die Komponenten des Ortsvektors *

Dies gilt für polare und axiale Vektoren gleichermaßen

Bspl: Raumspiegelung des Koordinatensystems und Drehimpuls

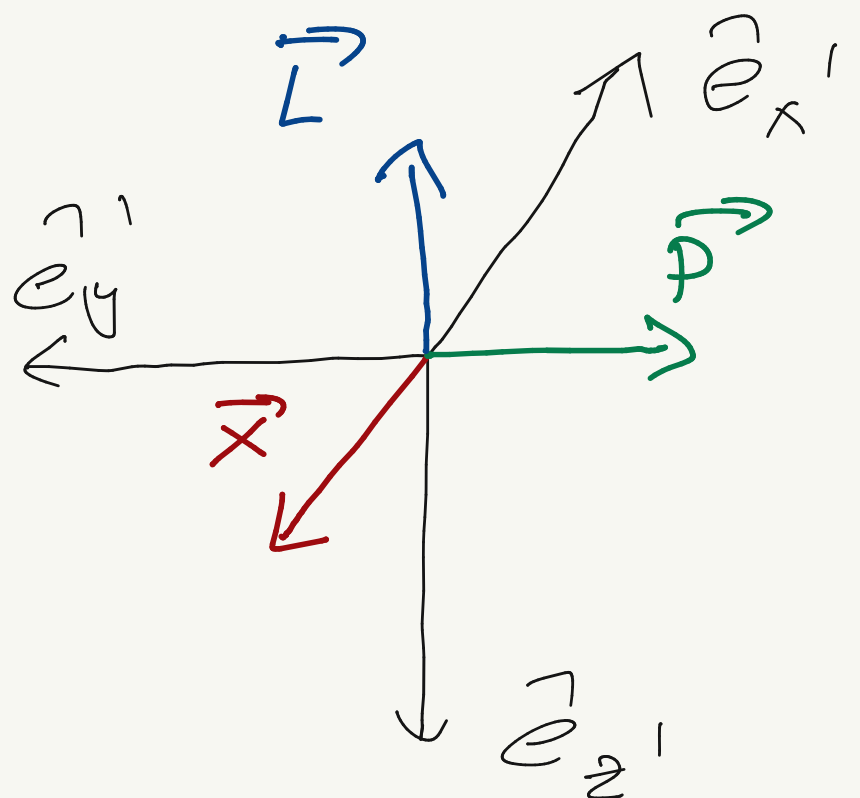


$$\vec{x} = (x, 0, 0)$$

$$\vec{p} = (0, p, 0)$$

$$\vec{L} = (0, 0, L)$$

Inversion



$$\vec{x} = (-x, 0, 0)$$

$$\vec{p} = (0, p, 0)$$

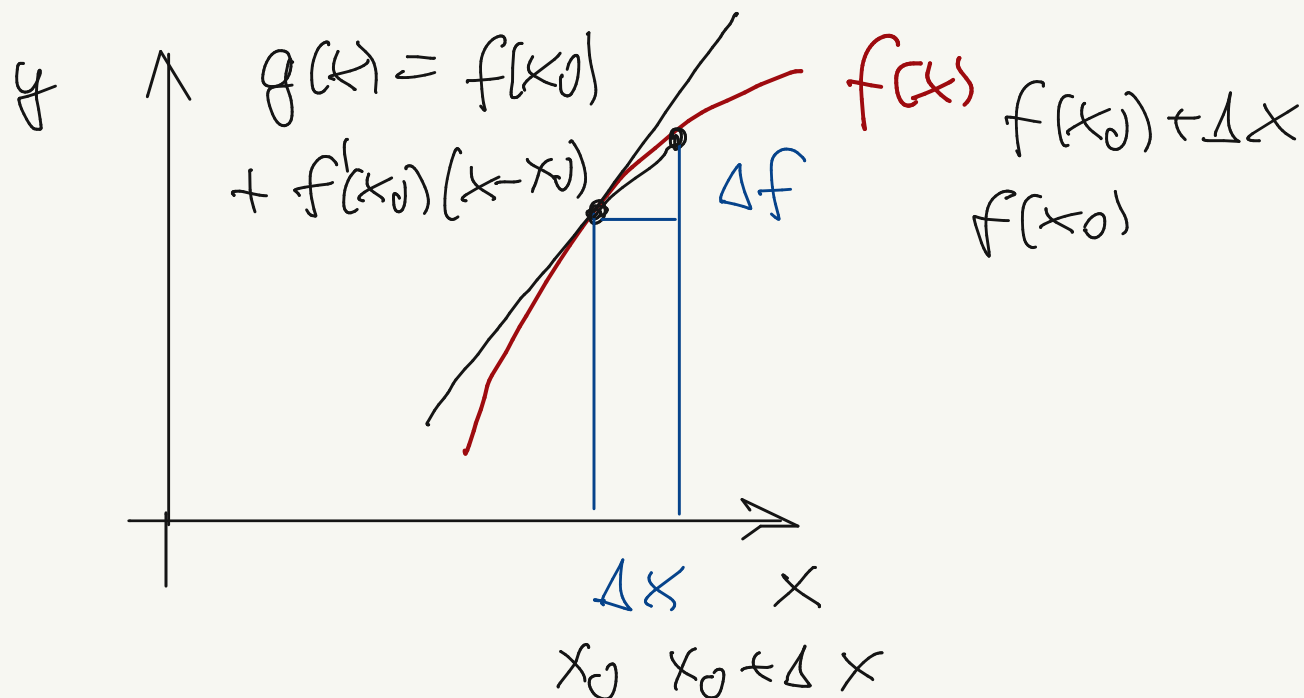
$$\vec{L} = (0, 0, -L)$$

* Wir werden später sehen, daß wir auch Größen benötigen, die sich anders verhalten. $\vec{L}$ zusehender

I. 5 Differentiation von Vektorfunktionen

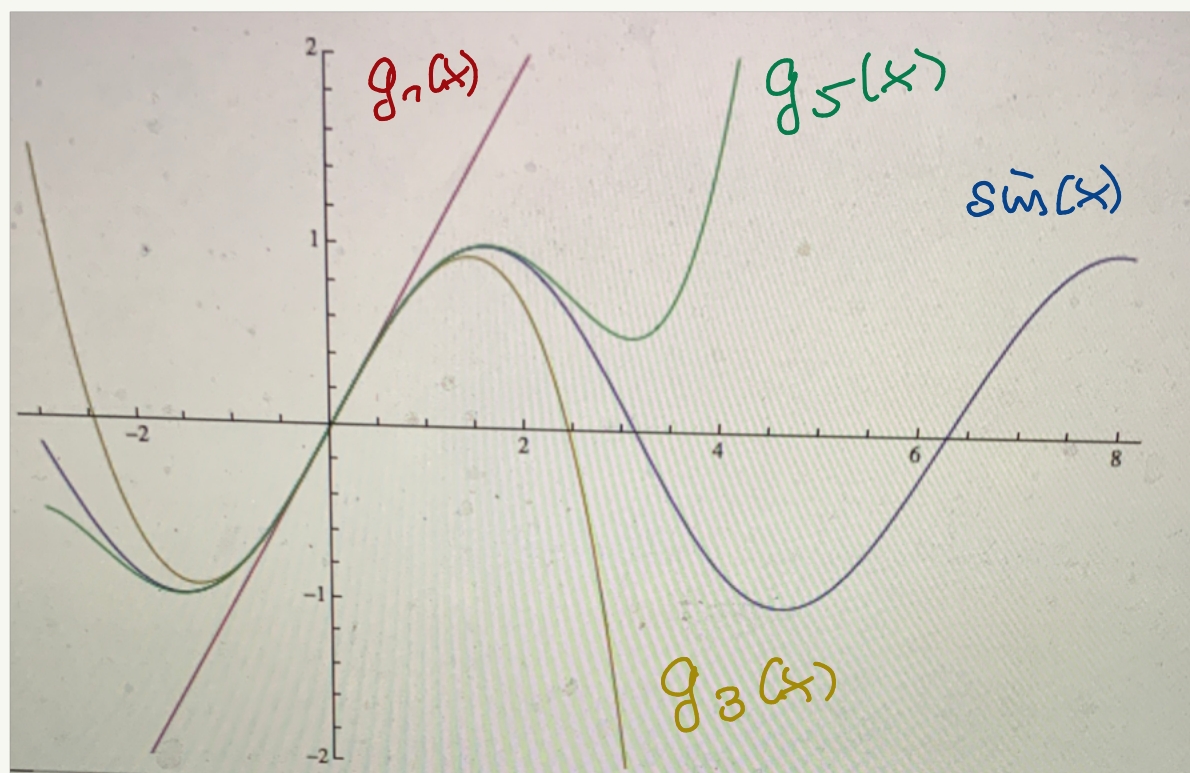
(A) Differentiation - zur Erinnerung

Differentiation von Größen im 3+1dim. Raum



$$f'(x_0) \equiv \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Taylorreihe (siehe Zusatzvideo)



$$f(x) \approx f(x_0) + \left. \begin{aligned} &+ f'(x_0)(x-x_0) \\ &+ \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 \\ &+ \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 \\ &+ \vdots \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &g_1(x) \\ &g_2(x) \\ &g_3(x) \end{aligned}$$

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x-x_0)^n$$

Das Differential

$$\Delta y \cong f'(x) \Delta x$$

Δx klein

$$\Delta y \rightarrow dy$$

$$\Delta x \rightarrow dx$$

(B) Differentiation von Vektorfunktionen

z.B. Ortsvektor eines Massenpunktes als Funktion der Zeit = Bahnkurve

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad t \rightarrow t + dt \Rightarrow \vec{r}?$$

Koordinatendarstellung $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

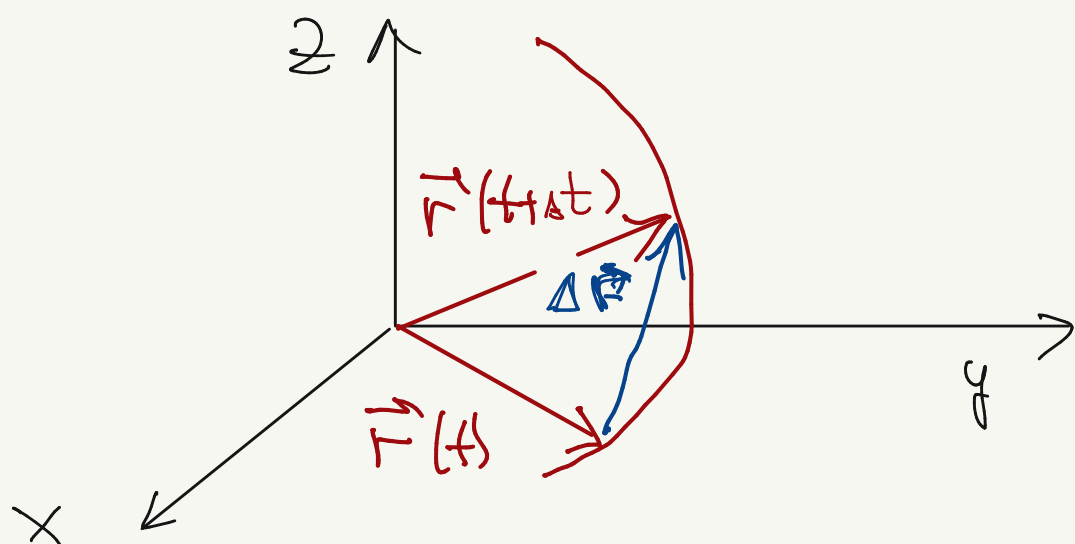
$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

raum- und zeitfestes Koordinatensystem!
(später wichtig!)

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t))$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$



$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) \\ &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)\end{aligned}$$

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

⇒ bei raum- und zeitlichen Koordinatensystem ist Differenzieren des Vektors gleich Differenzieren der Komponenten

Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$

(B) Partielle Ableitungen Funktionen mehrerer Variabler

z.B. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \quad F_x = F_x(x, y, z)$

partielle Ableitung einer Funktion $f(x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

analog $\frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}$

Manchmal (insbesondere in der Thermodynamik) wird es wichtig sein sich zu merken welche Variable konstant gehalten werden

$$\frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z}$$

y and z
nicht
verändert

Kurzformen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \partial_x f \equiv f_x \equiv f_{,x}$$

höhere Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial_x^2 f = f_{xx} \equiv f_{,xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial_y \partial_x f = f_{xy} = f_{,xy}$$

1. Ableit. $\rightarrow$ 2. Ableit.

Bspl.:

$$f(x,y) = 4x^5 + 2x^2y + 9xy^3$$

$$f_x = 20x^4 + 4xy + 9y^3$$

$$f_y = 2x^2 + 27xy^2$$

$$f_{xy} = 4x + 27y^2$$

$$f_{yx} = 4x + 27y^2$$



Satz von Schwarz

falls die zweiten partiellen Ableitungen existieren und stetig sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

umkehrte Abhängigkeit

$$f(x, y, z) = f(x(t), y(t), z(t))$$

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\overset{x+\Delta x}{\parallel} (t+\Delta t), \overset{y+\Delta y}{\parallel} (t+\Delta t), \overset{z+\Delta z}{\parallel} (t+\Delta t)) - f(x(t), y(t), z(t))}{\Delta t}$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left\{ \begin{aligned} & f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \underline{f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)} \\ & + \underline{f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)} - \underline{f(x, y, z+\Delta z)} \\ & + \underline{f(x, y, z+\Delta z)} - f(x, y, z) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} = & \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ & + \frac{f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ & + \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

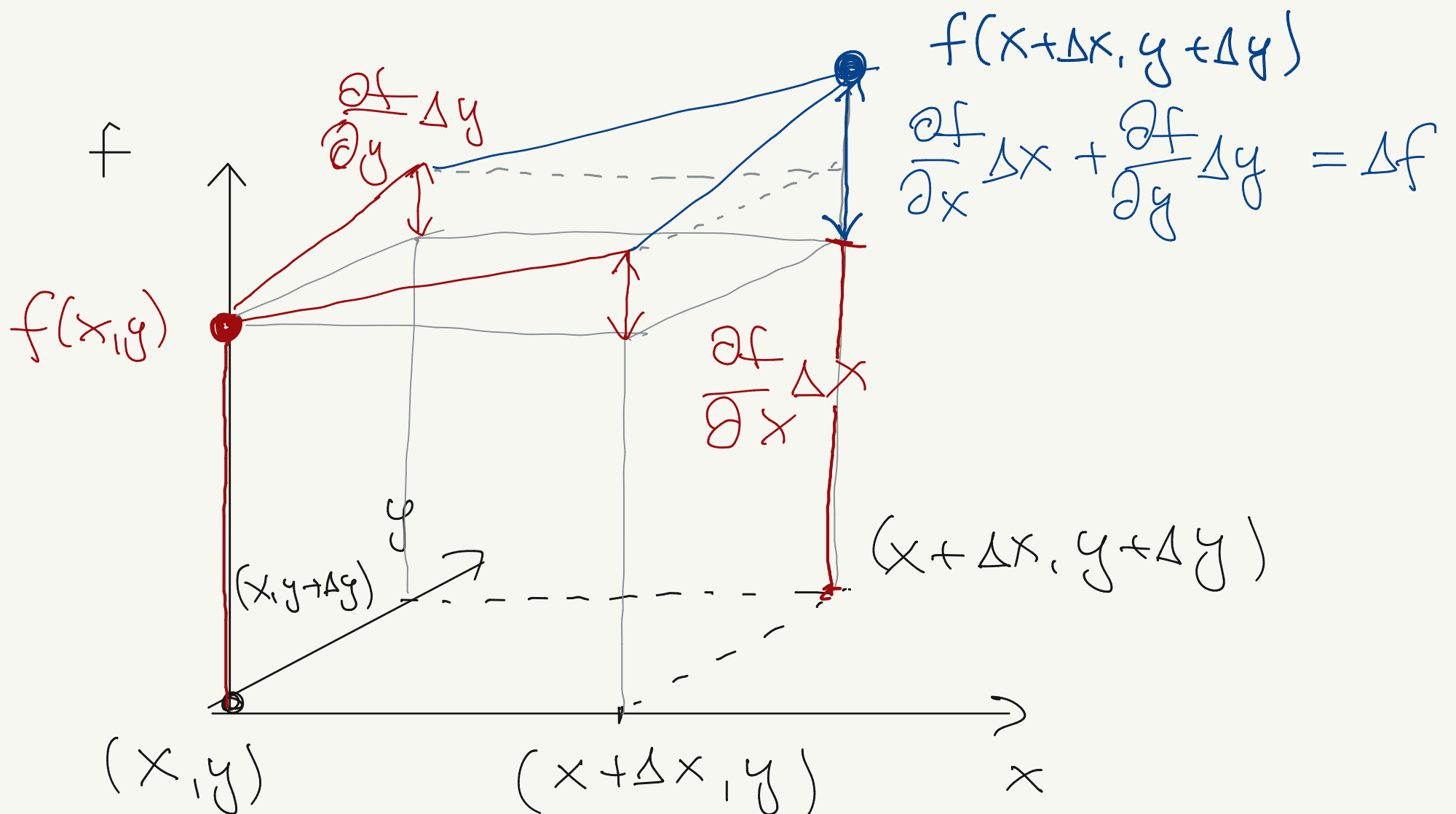
$$(\Rightarrow \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

analog

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

totales Differential von f



Bspl; $f(x,y) = x e^{y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y^2}$$

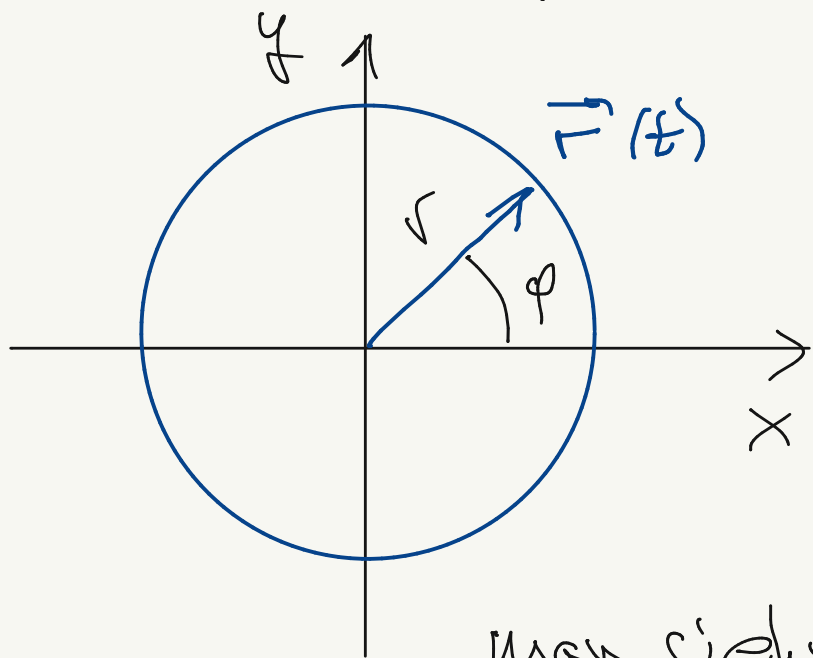
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy e^{y^2}$$

$$\Delta f = e^{y^2} \Delta x + 2xy e^{y^2} \Delta y$$

I.6. Krümmungslinige Koordinaten I

Bisher haben wir kartesische Koordinaten zur Beschreibung einer Vektor verwendet. Das erscheint zunächst einmal natürlich, ist aber offenkundig

z.B. Bewegung auf einer Kreisbahn



$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y$$

$$x(t) = r \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = r \sin(\omega t + \varphi_0)$$

man sieht $x^2(t) + y^2(t) = r^2$ Kreis

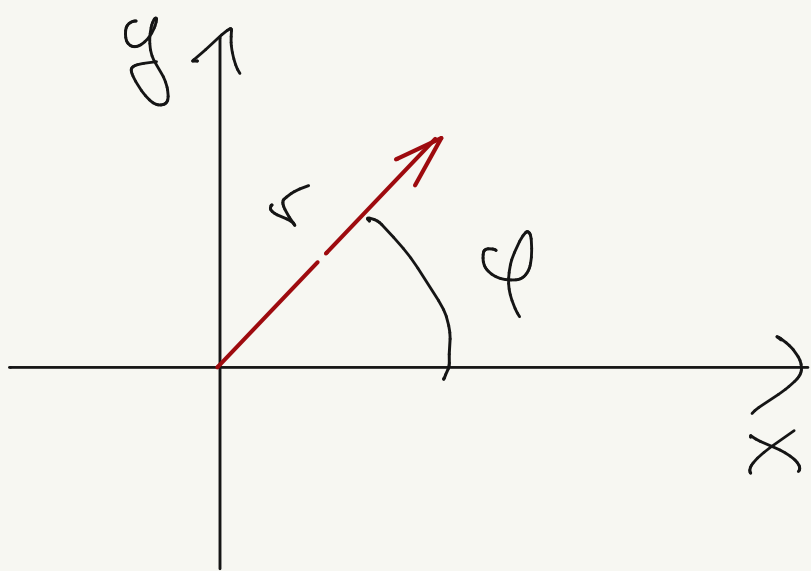
einfacher:

- Abstand zum Ursprung
 $r(t) = r = \text{konst}$

- Winkel zur x-Achse
 $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$

$\Rightarrow$ krümmungslinige Koordinaten

(A) Ebene Polarkoordinaten



$$\vec{r} = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi &= y/x \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Basisvektoren?

Wir stellen fest (bis auf Normierung auf Länge 1)

$$\hat{e}_x \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \quad \hat{e}_y \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \quad \hat{e}_z \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$$

d.h. wir definieren

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \\ \hat{e}_\varphi &= \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

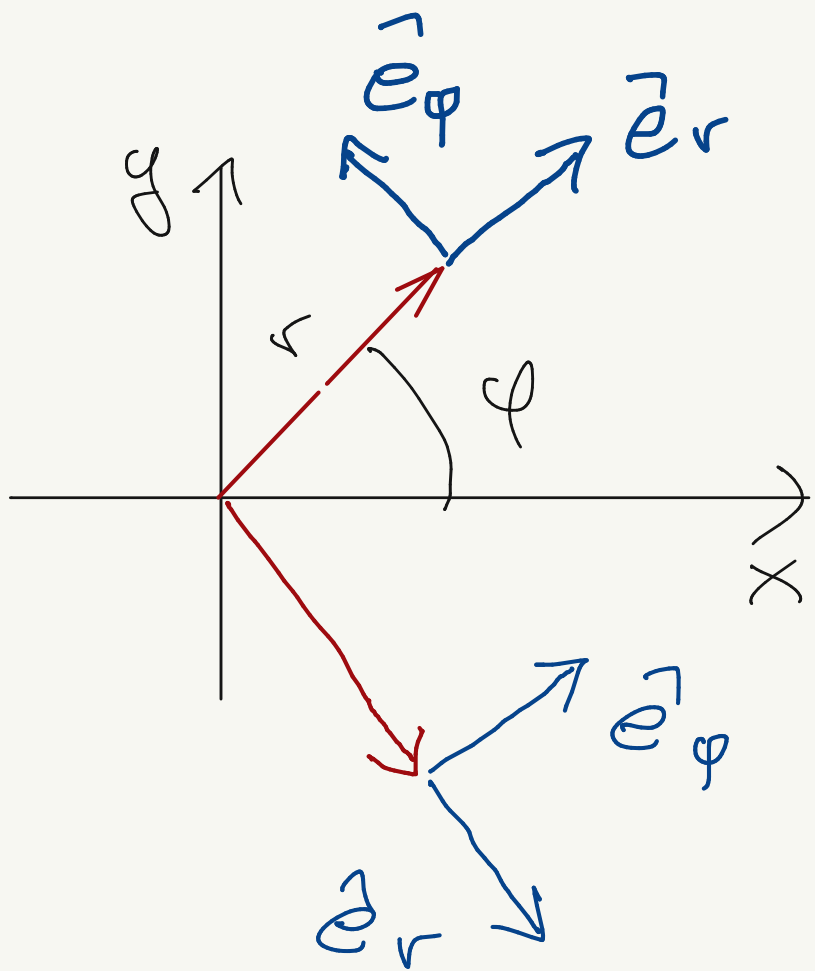
$$\vec{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = [\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi]^{1/2} = 1$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = [r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi]^{1/2} = r$$



$$\vec{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$\vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

Einheitsvektoren nicht
mehr raumfest;
hängen von $\vec{r}$ ab!

- Bahngleichung in ebenen Polarkoordinaten

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{e}_r(t) r(t)$$

↑
man beachte!

- Geschwindigkeit in ebenen Polarkoordinaten

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \vec{e}_r(t) \right) r(t) + \vec{e}_r(t) \frac{dr(t)}{dt}$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d}{dt} \vec{e}_r(t) = \frac{d}{dt} (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y)$$

$$= -\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_x + \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_y$$

$$= \frac{d\varphi(t)}{dt} (-\sin \varphi, \cos \varphi) = \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$$

azimutale
Geschwindigkeit

$$v_\varphi = r\dot{\varphi}$$

radiale
Geschwindigkeit

$$v_r = \dot{r}$$

- $\dot{\varphi}$ bezeichnet man als Winkelgeschwindigkeit
- Beschleunigung in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\vec{a} = \ddot{\vec{r}} &= \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(r\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{r}\hat{e}_r) \\ &= \dot{r}\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d}{dt}\hat{e}_\varphi \\ &\quad + \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\frac{d}{dt}\hat{e}_r\end{aligned}$$

benötigen

$$\begin{aligned}\left[\frac{d}{dt}\hat{e}_\varphi\right] &= \frac{d}{dt}(-\sin\varphi, \cos\varphi) = \dot{\varphi}(-\cos\varphi, -\sin\varphi) \\ &= -\dot{\varphi}\hat{e}_r\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \dot{r}\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\hat{e}_r \\ &\quad + \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi\end{aligned}$$

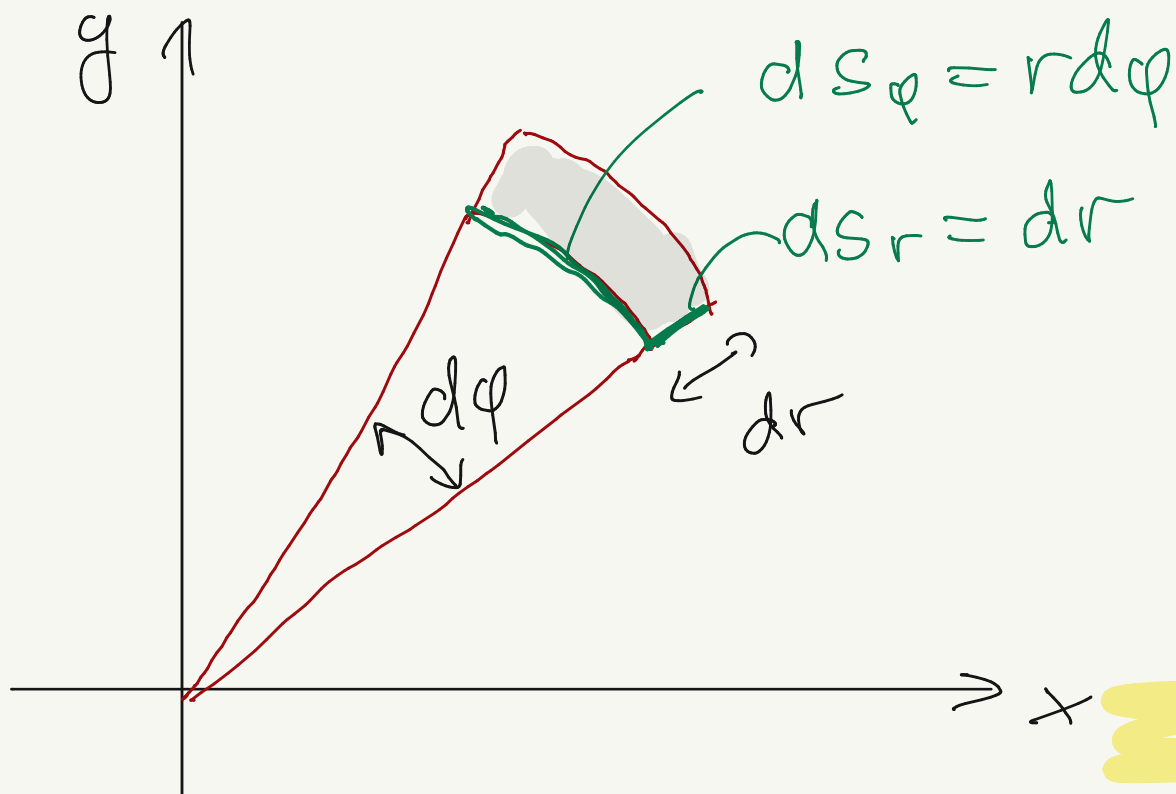
$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\hat{e}_\varphi$$

Radialbeschleunigung Winkelbeschleunigung

• Linienelement

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$= dr \hat{e}_r + r d\varphi \hat{e}_\varphi$$



$$dF = ds_\varphi ds_r$$

$$= r dr d\varphi$$

(B) Allgemeine krummlinige Koordinaten

$$\vec{r} = (u, v, w)$$

u, v, w sind beliebige (orthogonale)
krummlinige Koordinaten

• Einheitsvektoren

$$\hat{e}_u = \frac{1}{b_u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$$

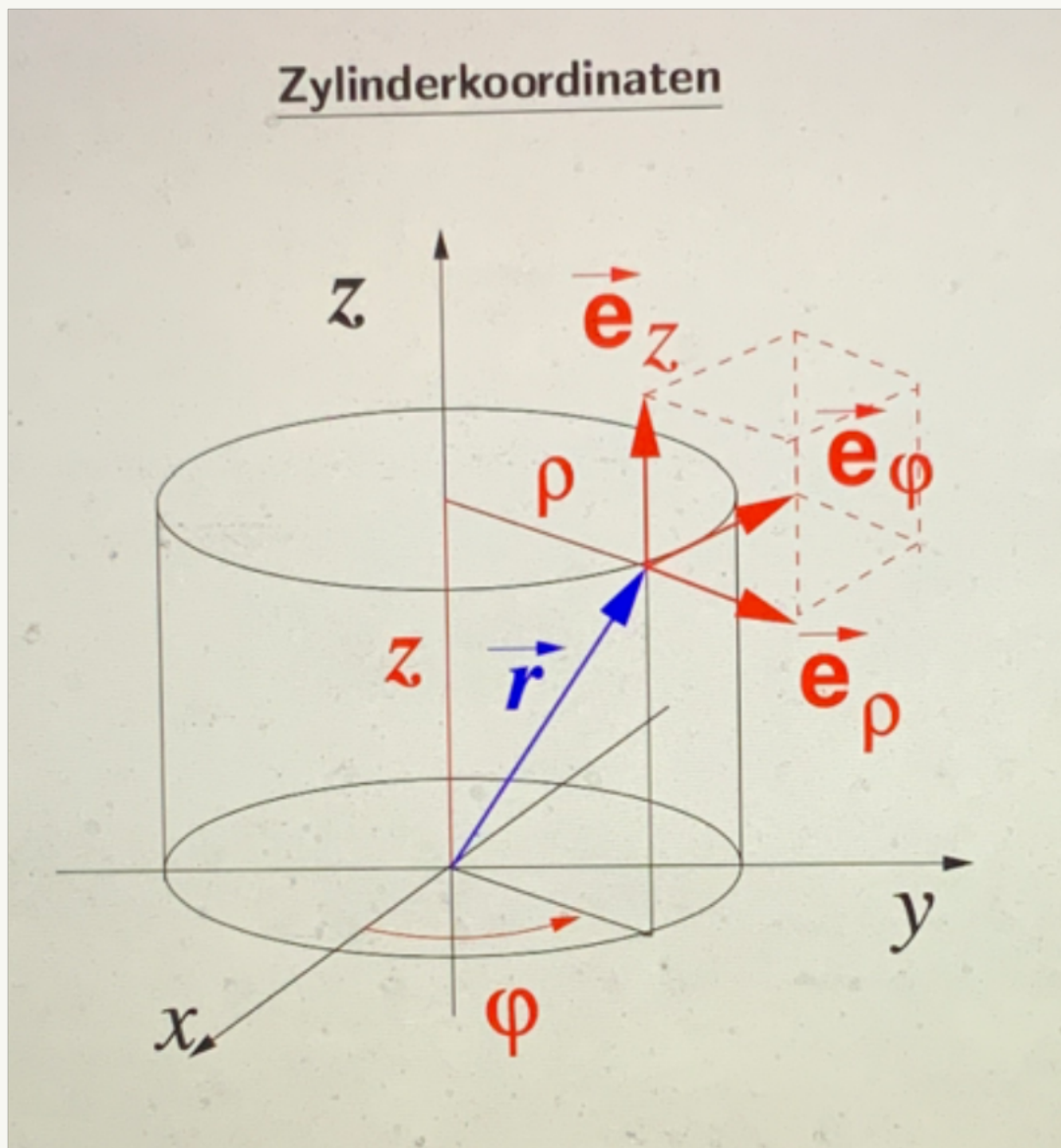
$$b_u = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|$$

• Orthogonalität

$$\hat{e}_u \cdot \hat{e}_v = \delta_{uv}$$

(hier $u, v \rightarrow 1, 2, \dots$)

(c) Zylinderkoordinaten



$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

(manchmal auch
"R" statt "ρ")

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \varphi = y/x$$

wie sphärische Polark.

$$\vec{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0) \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

$$b_\rho = 1$$

$$b_\varphi = \rho$$

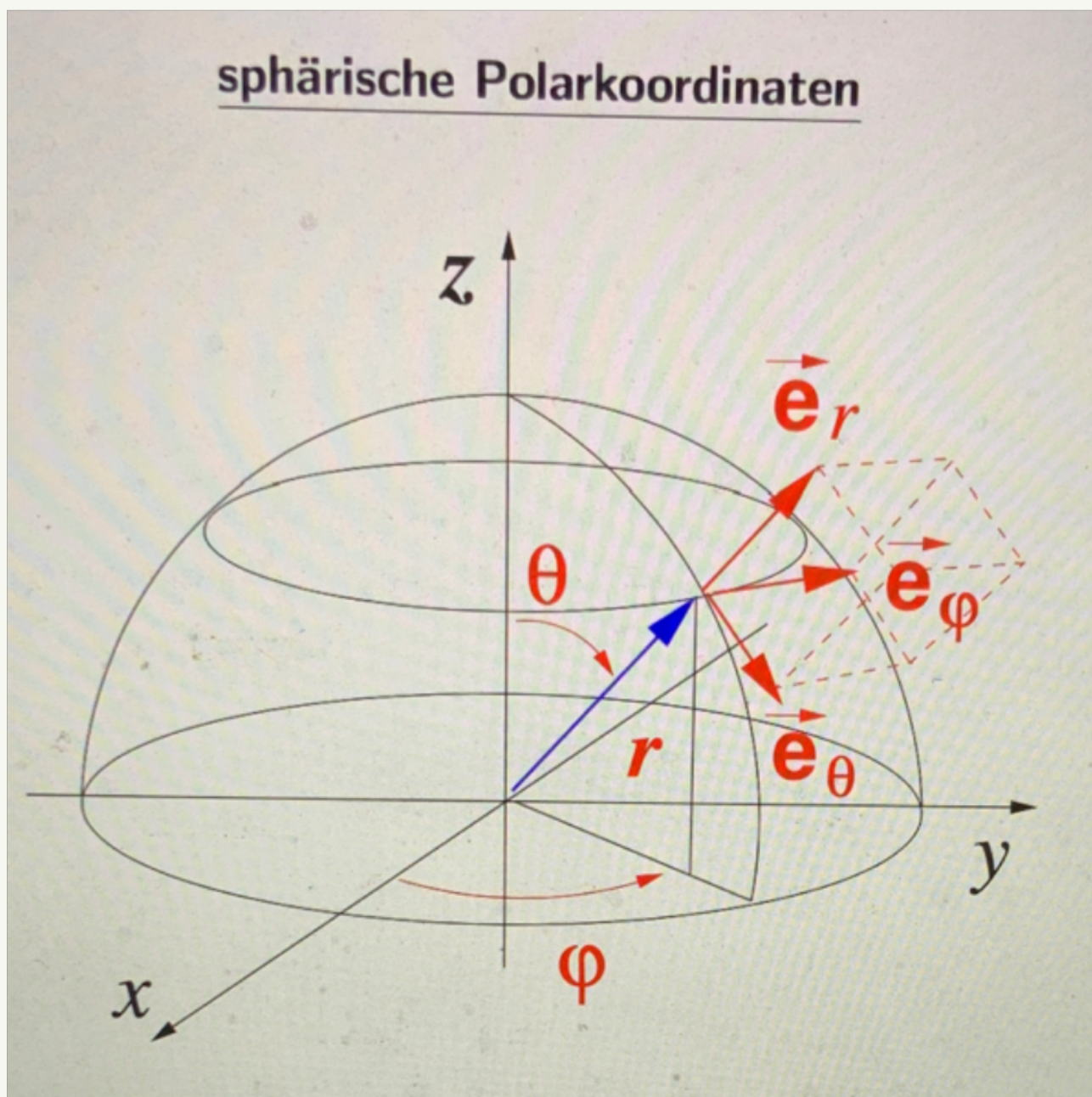
$$b_z = 1$$

$$\hat{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$\hat{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1)$$

(D) Kugelkoordinaten



$$x = r \cos \phi \sin \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\vec{r} = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi \sin \theta, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (r \cos \phi \cos \theta, r \sin \phi \cos \theta, -r \sin \theta)$$

$$b_r = 1$$

$$b_\phi = r \sin \theta$$

$$b_\theta = r$$

$$\vec{e}_r = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$$

$$\vec{e}_\theta = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, -\sin \theta)$$

$$\vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$