

XVII. 3 Fouriertransformation

F-Reihe $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{2\pi i k x / L}$

$$g_k = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) e^{-2\pi i k x / L}$$

$L \rightarrow \infty$ definieren $p = \frac{2\pi k}{L}$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{\frac{2\pi i k x}{L}} \Delta k \quad \Delta k = 1$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p) e^{ipx} \Delta p$$

$L \rightarrow \infty : \Delta p \rightarrow 0$ $\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{f}(p) e^{ipx}$

F-Transform

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{f}(p) e^{ipx}$$

$$dp = \frac{2\pi}{L} dk$$

inverse
F-Transform

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ipx}$$

Offt wird auch die symmetrische Definition verwendet

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{f}(p) e^{ipx}$$

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ipx}$$

Notation $\tilde{f}(p) = \mathcal{F}[f]$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}]$$

Voraussetzung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < \infty$$

absolut
integrierbar

(A) Eigenschaften der Fouriertransformation

(i) Linearität

$$\mathcal{F}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{F}[f_1] + c_2 \mathcal{F}[f_2]$$

(ii) Skalengesetz

$$\mathcal{F}[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|} \tilde{f}\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

(iii) Verschiebung

$$\mathcal{F}[f(x-x_0)] = e^{-ipx_0} \tilde{f}(p)$$

(iv) Ableitung (wichtige Eigenschaft)

$$\mathcal{F}[f'(x)] = ip \tilde{f}(p)$$

Bew.:

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f'(x) e^{-ipx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ipx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{ip}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ipx}$$

da $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$

$$= ip \tilde{f}(p) \quad \square$$

Wir werden diese Eigenschaft zum Lösen von gewöhnlichen und partiellen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten nutzen.

(v) Eine wichtige Eigenschaft ist die Fourierdarstellung der Deltafunktion

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{\pm i p x}$$

Beweis:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{f}(p) e^{i p x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-i p y} \right] e^{i p x}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{i p (x-y)} \right] f(y)$$

$$\underbrace{\quad}_{= \delta(x-y)}$$

Mit $\delta(-x) = \delta(x)$ folgt $e^{i p x} \rightarrow e^{\pm i p x}$

(vi) Desweiteren gilt die Parseval-Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_1^*(x) f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{f}_1^*(p) \tilde{f}_2(p)$$

Beweis

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(x) f_2(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \tilde{f}_1^*(\rho) e^{-i\rho x} \right] \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}_2(k) e^{ikx} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}_1^*(\rho) \tilde{f}_2(k) \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k-\rho)x} \right]}_{=\delta(k-\rho)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \tilde{f}_1^*(\rho) \tilde{f}_2(\rho) \quad \square\end{aligned}$$

Spezialfall

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho |\tilde{f}(\rho)|^2}$$

(vii) Faltungssatz

Was ist die Fouriertransformierte eines Produktes?

Def: Faltung zweier Funktionen

$$\begin{aligned} f \otimes g &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \, f(y) g(x-y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \, g(y) f(x-y) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f \otimes g] &= \mathcal{F}[g \otimes f] \\ &= \tilde{f}(p) \tilde{g}(p) \end{aligned}$$

Faltungssatz

Umgekehrt

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \tilde{f}(p) \otimes \tilde{g}(p)$$

Beweis

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f \otimes g] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \, f(y) g(x-y) e^{-ipx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \, f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, g(x-y) e^{-ip(x-y)} e^{-ipy} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \, f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \, g(u) e^{-ipu} e^{-ipy} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-ipy} \quad \tilde{g}(p) = \tilde{f}(p) \tilde{g}(p) \quad \square$$

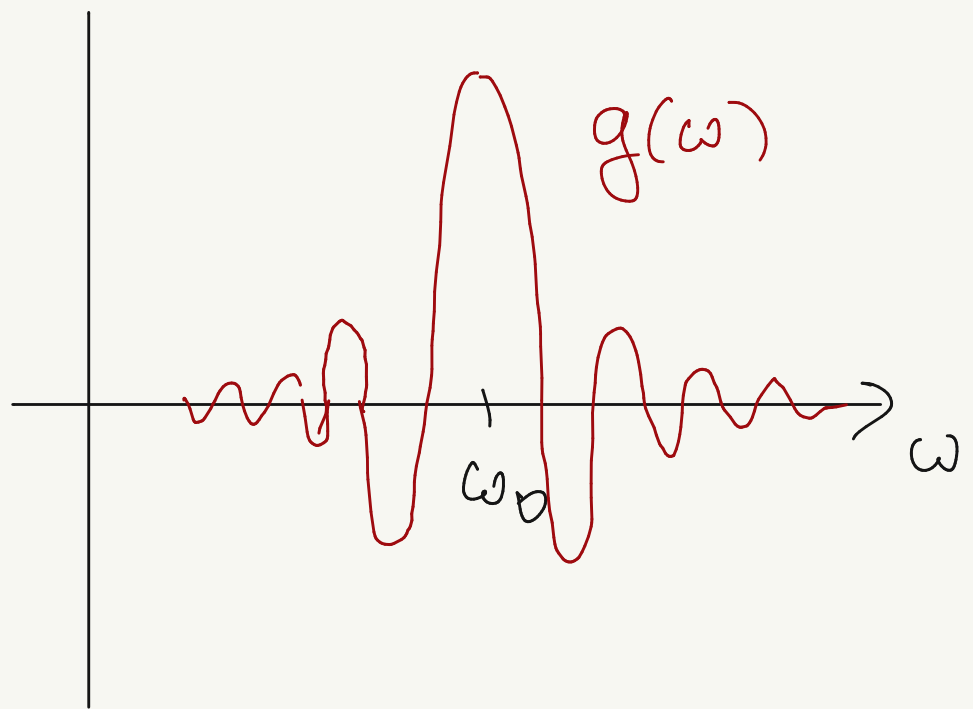
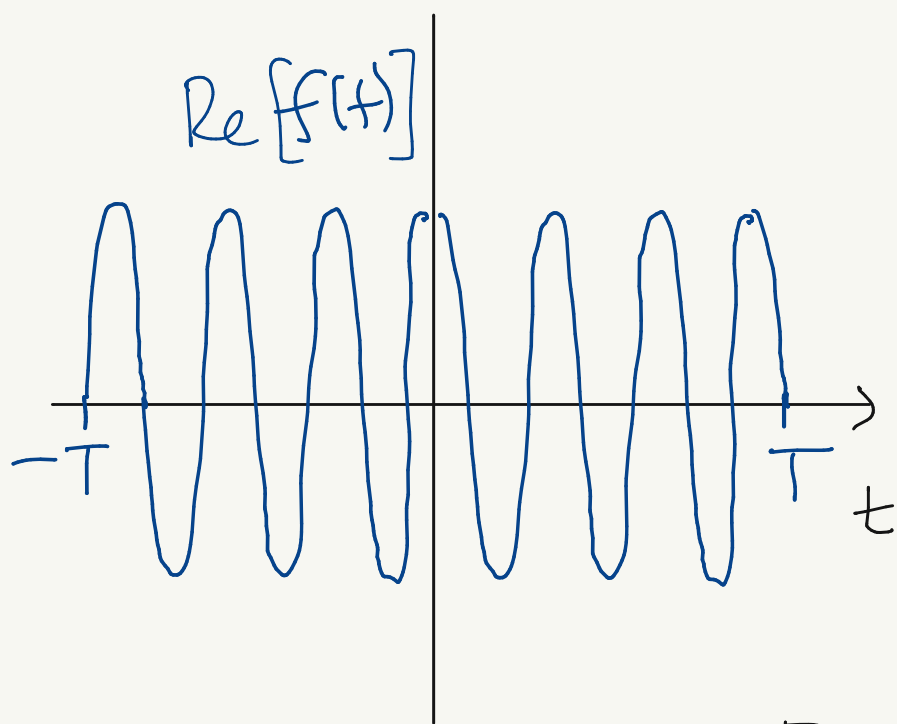
(B) Beispiele

Fouriertransformation wird oft auf dynamische Probleme angewendet

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \quad \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}$$

endlicher Wellenzug

$$\bullet \quad f(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t} & -T < t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

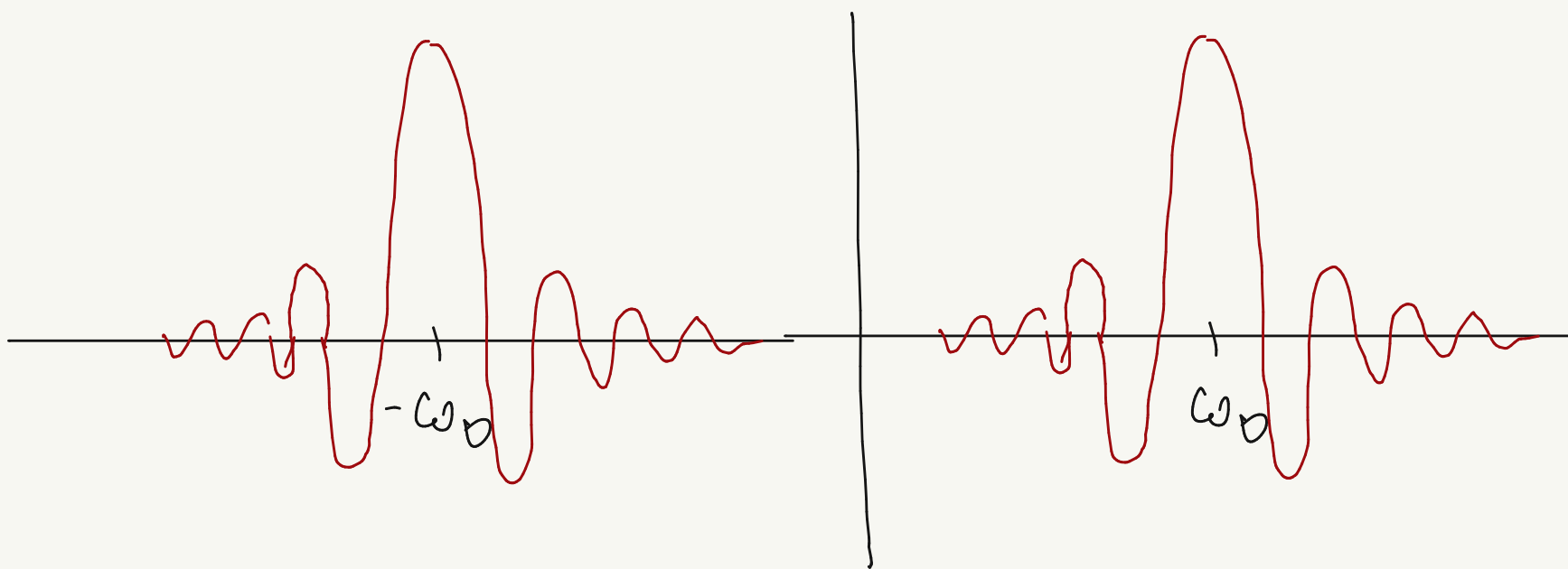


$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T dt e^{i(\omega_0 - \omega)t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega_0 - \omega)T}{\omega_0 - \omega}$$

$$\bullet \quad f(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t & -T < t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left[\frac{\sin(\omega_0 - \omega)T}{\omega_0 - \omega} + \frac{\sin(\omega_0 + \omega)T}{\omega_0 + \omega} \right]$$

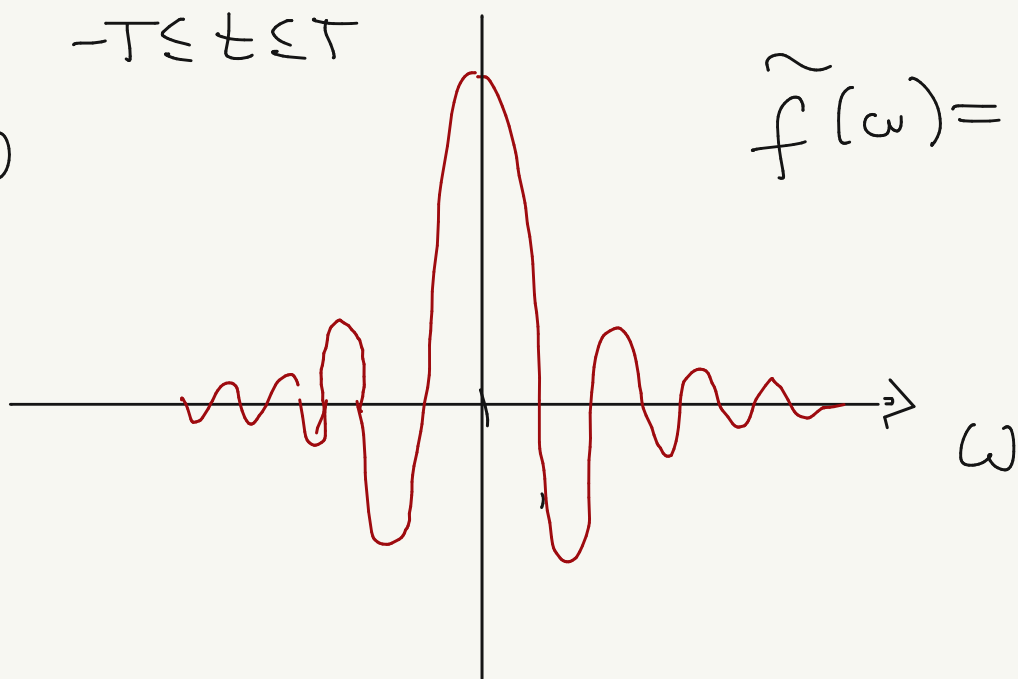


• Rechteck Puls

(Wellenzug mit $\omega_0 = 0$)
 $\cos \omega t$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \frac{\sin \omega T}{\omega}$$



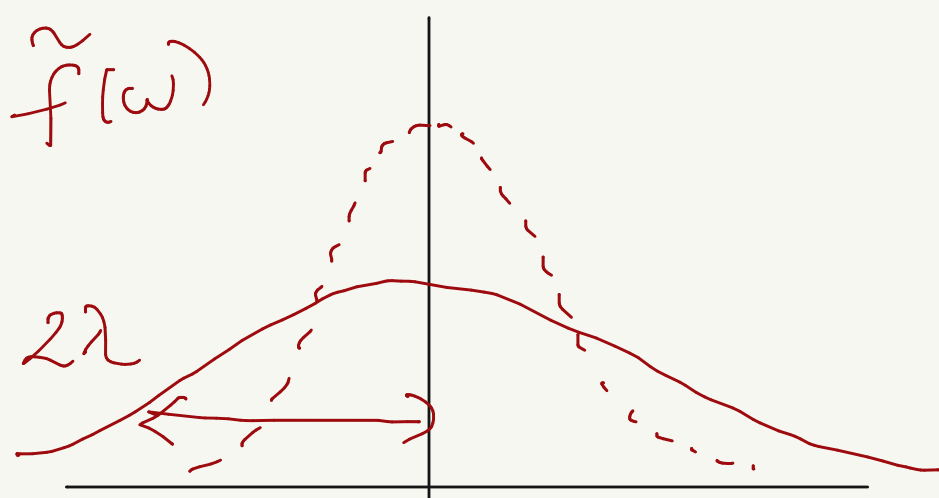
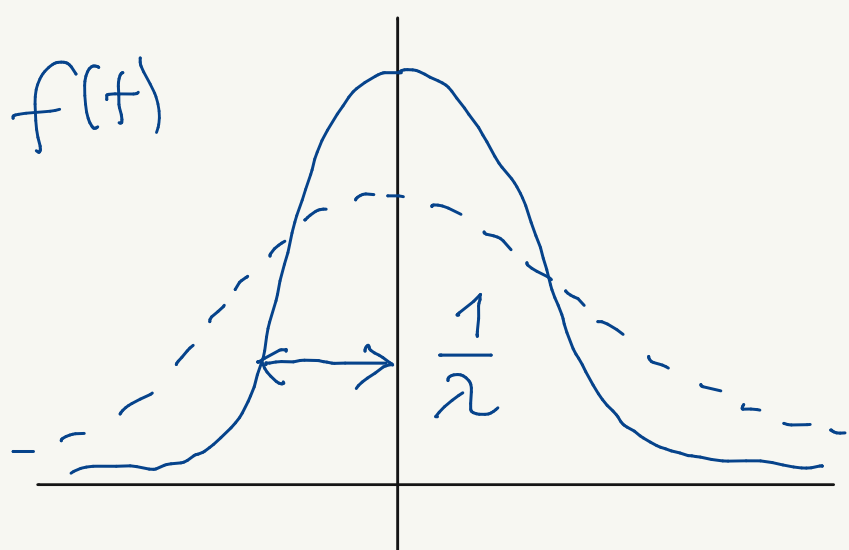
Gauß Puls

(hier ohne Beweis)

$$f(t) = f_0 e^{-\lambda^2 t^2}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{2\lambda^2}} e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda^2}}$$

Fouriertransformation einer Gaußfunktion ist eine Gaußfunktion



Breiten der Gaußpulse sind umgekehrt proportional

Es gilt eine allgemeine Unschärferelation

$$\langle t^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 t^n$$

$$\langle \omega^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\tilde{f}(\omega)|^2 \omega^n$$

$$\Delta t = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2} = \sqrt{\langle (t - \langle t \rangle)^2 \rangle}$$

$$\Delta \omega = \sqrt{\langle \omega^2 \rangle - \langle \omega \rangle^2} = \sqrt{\langle (\omega - \langle \omega \rangle)^2 \rangle}$$

$$\Delta \omega \Delta t \geq \frac{1}{2}$$

(C) Anwendungen der Fouriertransformation

Lösen von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

- Greensche Funktion der Poissongleichung

$$(*) \quad \Delta G(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r})$$

F-Trafo 3dimensional

$$\tilde{G}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx \int dy \int dz e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}} G(\vec{r})$$

$$\Delta G \rightarrow -\vec{p}^2 \tilde{G}(\vec{p})$$

aus (*)

$$\tilde{G}(\vec{p}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} p^2}$$

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{+i\vec{p} \cdot \vec{r}}}{p^2}$$

Kugelkoordinaten z-Achse $\parallel \vec{r}$

$$d^3p = dp \, d\vartheta \, \sin\vartheta \, dp \, p^2$$

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos\vartheta$$

$$\begin{aligned}
G(\vec{r}) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{\infty} dp \, p^2 \frac{e^{ipr\cos\vartheta}}{p^2} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d\vartheta \int_0^{\infty} dp \, e^{ipr\vartheta} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dp \int_0^1 d\vartheta (e^{ipr\vartheta} + e^{-ipr\vartheta}) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^1 d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} dp \, e^{ipr\vartheta} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\vartheta \delta(r\vartheta) \\
&= -\frac{1}{2\pi r} \underbrace{\int_0^1 d\vartheta \delta(r\vartheta)}_{=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4\pi r} \quad \square
\end{aligned}$$

- gepulster harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

wobei $f(t) = f_0 e^{-\alpha t^2} \cos \lambda t$

$$\Rightarrow x = \operatorname{Re}[y] \text{ mit}$$

$$\ddot{y} + 2\gamma \dot{y} + \omega_0^2 y = f_0 e^{-\alpha t^2} e^{i\lambda t}$$

F-Trafo $\Rightarrow$ algebraische Gleichung !!!

$$(*) \quad -\omega^2 \tilde{y} + 2i\omega\gamma \tilde{y} + \omega_0^2 \tilde{y} = g(\omega)$$

wobei

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, f_0 e^{-\alpha t^2} e^{i\Omega t} e^{-i\omega t}$$

Lösung von (*)

$$\tilde{y}(\omega) = \frac{g(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma_1}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{g(\omega) e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma_1}$$

D.h. die Differentialgleichung ist gelöst bis auf eine Integration!