

XVII

Orthogonale Funktionen

Bei der Lösung gewöhnlicher und partieller DGL haben wir vom Superpositionsprinzip Gebrauch gemacht und allgemeine Lösungen in der Form

$$f(x) = \sum_n c_n f_n(x)$$

dargestellt. In Kapitel 1 hatten wir bereits erwähnt, daß Polynome als Vektoren in einem linearen Raum (Vektorraum) auffassen kann (siehe auch Zusatzvideo). Daran wollen wir jetzt anknüpfen

Betrachten: Menge aller Funktionen

$$f(x) \quad a \leq x \leq b$$

mit $\left| \int_a^b dx f(x) \right| < \infty$

$$\int_a^b dx |f(x)|^2 < \infty$$

Def: Skalarprodukt $f(x) \hat{=} |f\rangle$

(*)

$$\langle g | f \rangle = \int_a^b dx g^*(x) f(x)$$

allgemeiner kann man im Skalarprodukt noch eine Wichtungsfunktion $g(x)$ zuweisen

$$(**) \quad \langle g | f \rangle = \int_a^b dx \, g(x) \, g^*(x) f(x)$$

$g(x)$ fix

(*) und (**) erfüllen alle Bedingungen an ein Skalarprodukt

Außerdem kann man trivialerweise die Addition und Multiplikation mit komplexen Zahlen definieren

$$|y\rangle = |g\rangle + |f\rangle \quad \hat{=} \quad y(x) = f(x) + g(x)$$

$$|y\rangle = \lambda |g\rangle \quad \hat{=} \quad y(x) = \lambda g(x)$$

$\Rightarrow$ Vektorraum

Zwei Funktionen heißen orthogonal, wenn

$$\langle g | f \rangle = \int_a^b dx \, g(x) \, g^*(x) f(x) = 0$$

XVII.1 Orthogonale Polynome

(A) Legendre Polynome

Bei der Separation des Laplaceoperators Δ in Kugelkoordinaten waren uns die Legendre Polynome begegnet ($x = \cos\vartheta$)

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell \quad -1 \leq x \leq 1$$

- $P_0(x) = 1$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

gerade in x

ungerade in x

Polynome ℓ 'ten Grades

- Skalarprodukt und Orthogonalität

$$\langle P_\ell | P_{\ell'} \rangle = \int_{-1}^1 dx P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

- Vollständigkeit ($P_\ell(x)$ Basis in $-1 \leq x \leq 1$)

$$\delta(x-x') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} P_\ell(x) P_\ell(x')$$

Die Vollständigkeitsrelation zeigt, daß jede auf $-1 \leq x \leq 1$ definierte quadrat-integrierbare Funktion durch Legendre-Polynome darstellbar ist

$$f(x) = \int_{-1}^1 dx' f(x') \delta(x' - x)$$

$$= \int_{-1}^1 dx' f(x') \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} P_{\ell}(x') P_{\ell}(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell} P_{\ell}(x)$$

wobei $f_{\ell} = \int_{-1}^1 dx' f(x') P_{\ell}(x') \frac{2\ell+1}{2}$

(B) Weitere wichtige orthogonale Polynome

$\rho(x)$	$a \leq x \leq b$	C_n	Name	Symbol
1	$-1 \leq x \leq 1$	$\frac{2n}{2n+1}$	Legendre	$P_n(x)$
e^{-x^2}	$-\infty \leq x \leq \infty$	$\sqrt{\pi} 2^n n!$	Hermite	$H_n(x)$
e^{-x}	$0 \leq x \leq \infty$	1	Laguerre	$L_n(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 \leq x \leq 1$	$\frac{\pi}{2} (1 + \delta_{n0})$	Tschebyscheff	$T_n(x)$

$$\int_a^b dx \, Q_n(x) Q_m(x) = C_n \delta_{nm}$$

XVII. 2 Fourierreihen

Betrachten periodische Funktionen; zur Vereinfachung mit Periode 2π

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

Solche Funktionen können durch orthogonale Funktionen

$$\sin(kx) \text{ und } \cos(kx)$$

ausgedrückt werden.

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \, \sin(kx) \sin(k'x) = \pi \delta_{kk'}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \, \cos(kx) \cos(k'x) = \pi \delta_{kk'}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \, \cos(kx) \sin(k'x) = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

Fourierreihe

wobei

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx \quad k \neq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin kx$$

• komplexe Schreibweise

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ikx}$$

komplexe Fourierreihe

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ik'x} e^{ikx} = 2\pi \delta_{kk'}$$

Damit

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) e^{-ikx}$$

• Periode L

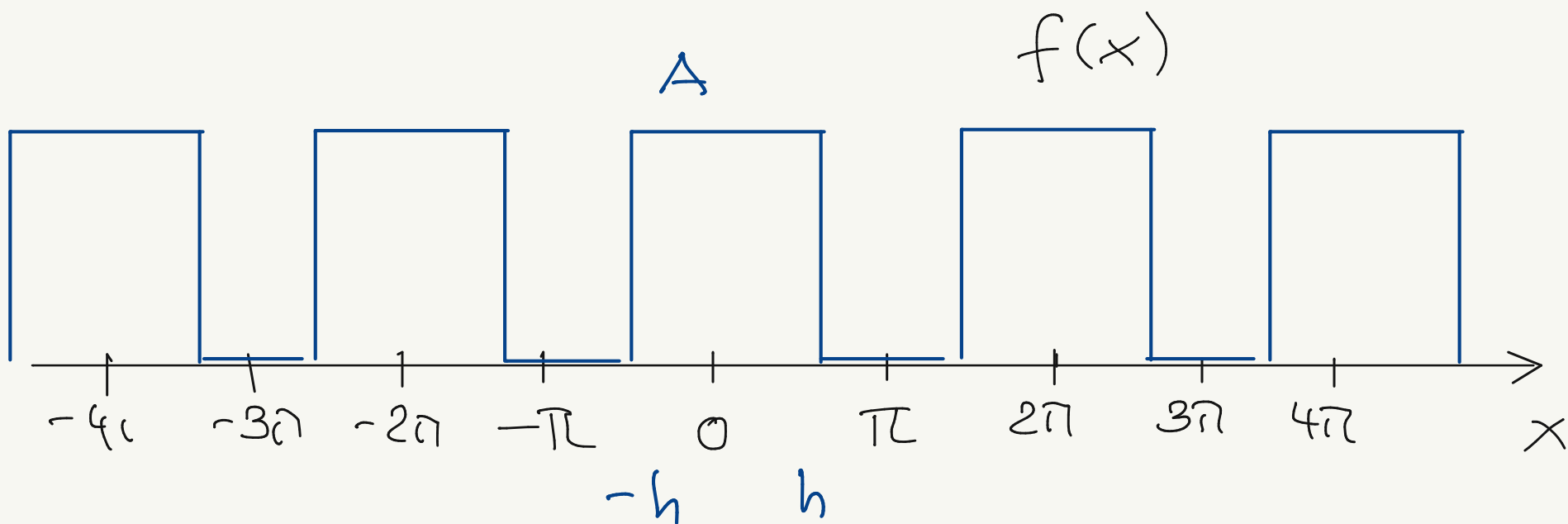
$$k \rightarrow \frac{2\pi}{L} k$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \rightarrow \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx$$

$$f(x) = \sum_k g_k e^{\frac{2\pi i k}{L} x}$$

• Beispiel

Rechteckschwingung



$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} A & |x| \leq h < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$f(x)$ symmetrisch $\Rightarrow b_k \equiv 0$ in Fourierreihe

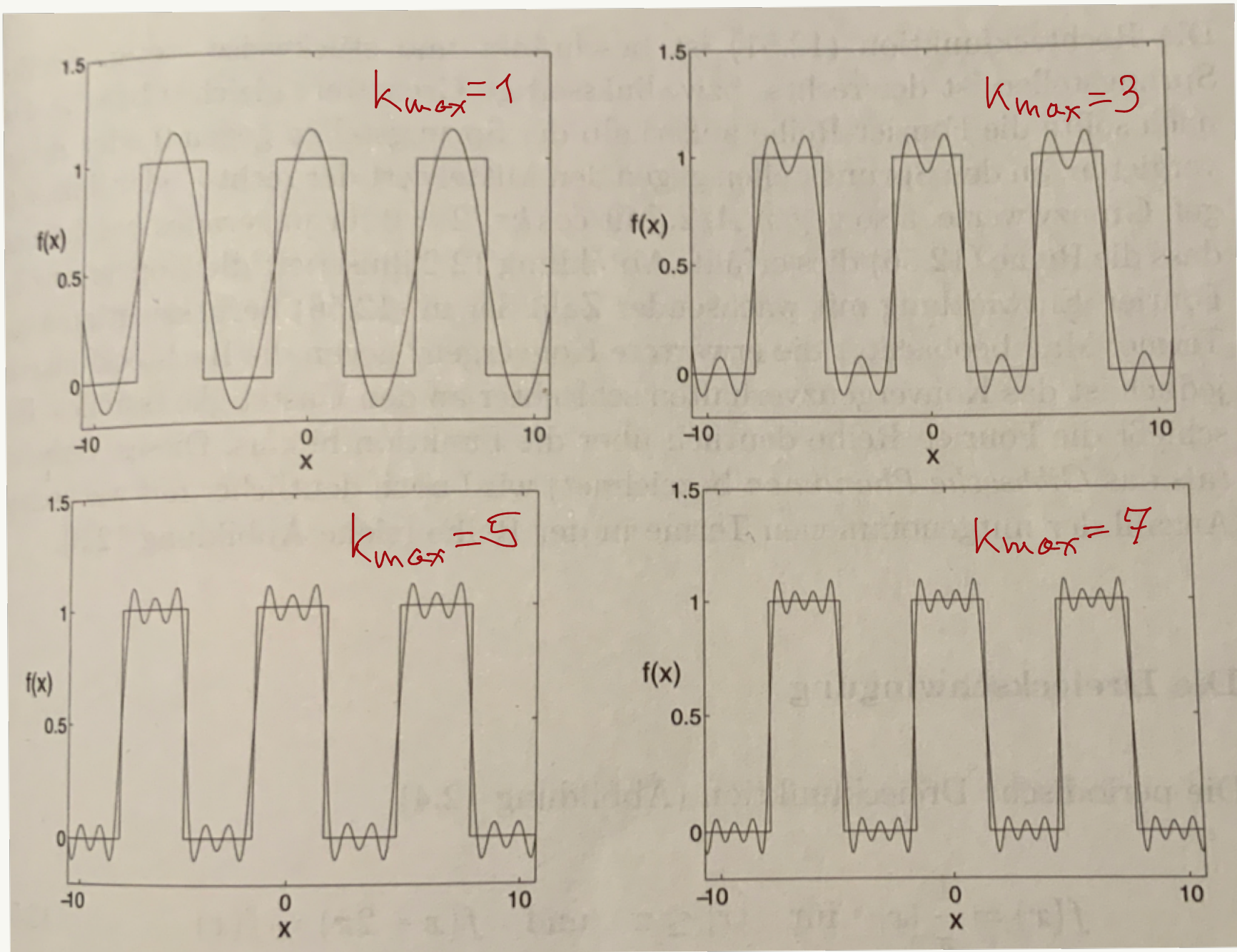
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) = \frac{A}{\pi} \int_{-h}^h dx = \frac{2Ah}{\pi}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx = \frac{A}{\pi} \int_{-h}^h dx \cos kx = \frac{2A \sin kh}{\pi k}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{Ah}{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kh}{kh} \cos kx \right\}$$

Speziell $h = \frac{\pi}{2}$ $\sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} +1 & k=1,5,9 \\ 0 & k \text{ gerade} \\ -1 & k=3,7,11 \end{cases}$

$$f(x) = \frac{A}{2} \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \dots \right) \right\}$$



Parseval - Identität

Periode L

$$\|f\|^2 = \langle f|f \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dx |f(x)|^2$$

mit $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{2\pi i k x / L}$

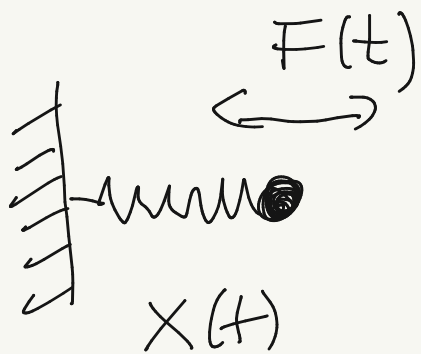
$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \frac{1}{L} \sum_{k, k'} g_k^* g_{k'} \underbrace{\int_0^L dx e^{-\frac{2\pi i (k-k')x}{L}}}_{L \delta_{kk'}} \\ &= \sum_k |g_k|^2 \end{aligned}$$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{L} \int_0^L dx |f(x)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k|^2$$

Parseval Identität

Anwendung

periodisch gehobener harm. Oszillator



$$F(t+T) = F(t) \quad \text{Periode } T$$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$$\text{wobei } f(t) = \frac{1}{m} F(t)$$

Zur Vereinfachung: kein Resonanzfall, d.h.
entweder $\omega_0 \neq \frac{2\pi}{T}$ oder $\gamma \neq 0$

Fourierzerlegung von $x(t)$, $f(t)$

$$f(t) = \sum_k f_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_k b_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t}$$

$$\dot{x}(t) = i \frac{2\pi}{T} \sum_k k b_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t} \text{ etc.} \quad \Omega \equiv \frac{2\pi}{T}$$

einsetzen in DGL liefert

$$\sum_k \left(-(k\Omega)^2 + 2ik\gamma\Omega + \omega_0^2 \right) b_k e^{ik\Omega t} = \sum_k f_k e^{ik\Omega t}$$

Fourierreihen identisch nur wenn alle
Koeffizienten identisch sind

$$\Rightarrow b_k = \frac{f_k}{\omega_0^2 - (k\Omega)^2 + 2ik\gamma\Omega}$$

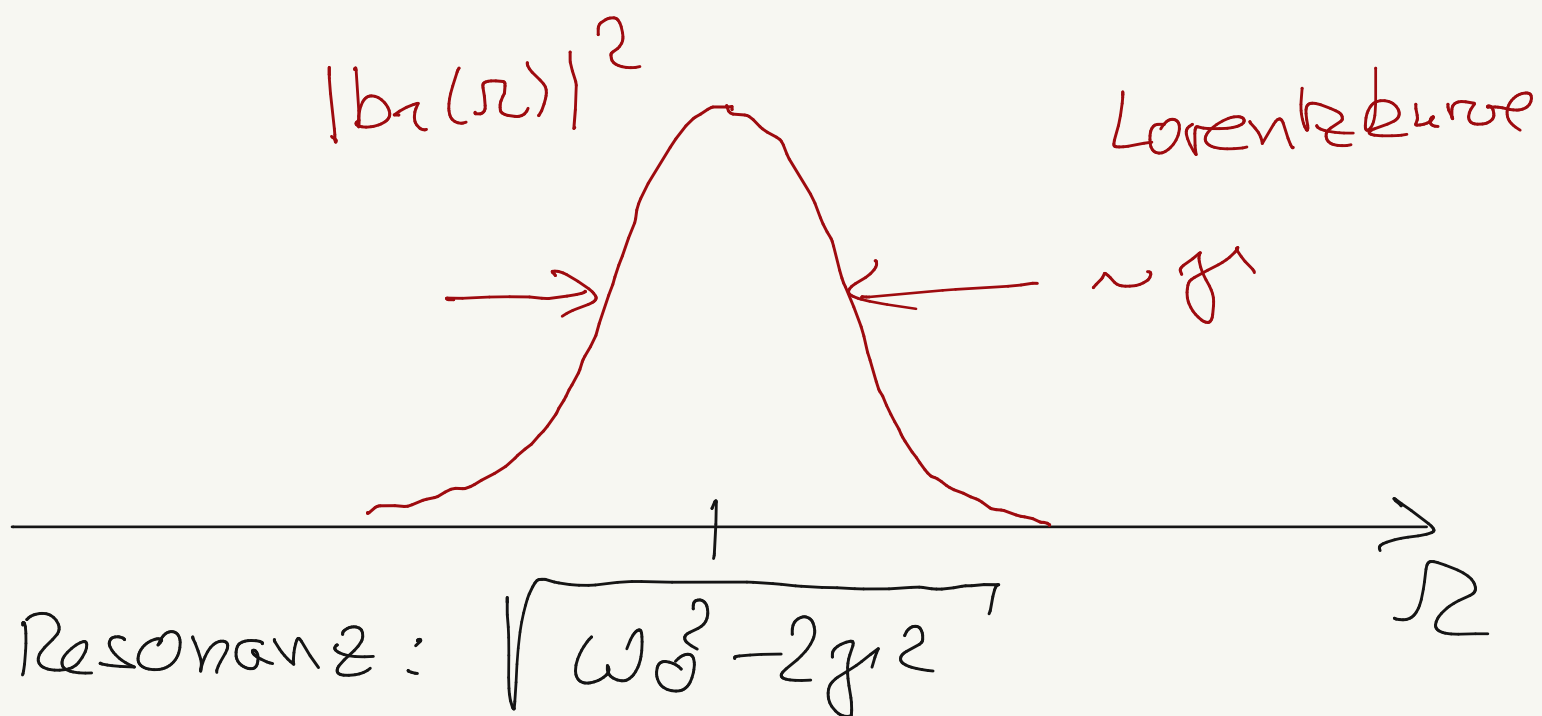
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k e^{i\Omega k t}}{\omega_0^2 - k^2\Omega^2 + 2ik\gamma\Omega}$$

$$|b_k|^2 = \frac{|f_k|^2}{(\omega_0^2 - (kR)^2)^2 + 4\gamma^2(Rk)^2}$$

- harmonischer Antrieb, d.h. $f_1 \neq 0$ Rest 0

$$|b_1|^2 = \frac{|f_1|^2}{(\omega_0^2 - R^2)^2 + 4\gamma^2 R^2}$$

$$= \frac{|f_1|^2}{(\Omega^2 - (\omega_0^2 - 2\gamma^2))^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}$$



- Fourierreihe $f(x)$ mit $x \in \{-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\}$

$L \rightarrow \infty$?