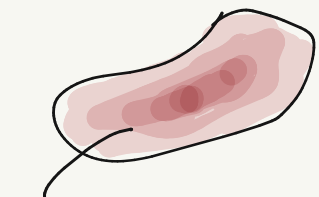


XIV. Elektrostatik

XIV.1 Elektr. Feld und Potential einer Ladungsverteilung im unendlich ausgedehnten Raum



$$\rho(\vec{r}) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r})? \\ \phi(\vec{r})?$$

Grundgleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

(*)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

• Eichfreiheit

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial t}}_{\text{konst}_t} = \phi' + \text{konst.}$$

ist beschränkt auf konstanten Term.

• Einsetzen von (*) in Maxwell =>

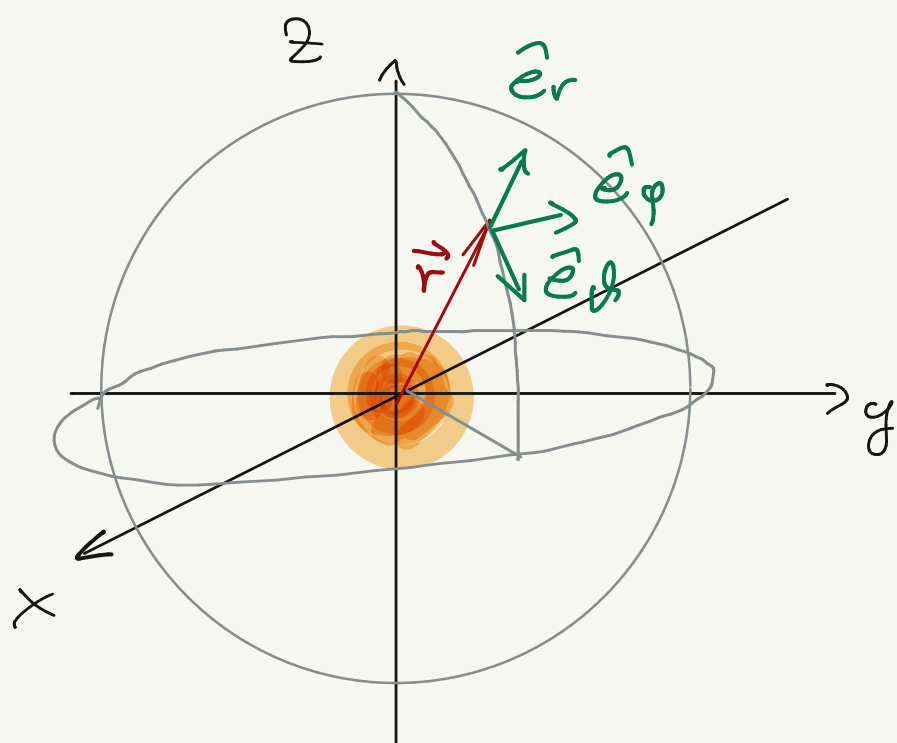
$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Poissongleichung

• Lösung elektrostatischer Probleme (im unendlich ausgedehnten Raum ohne Randbedingungen) = Lösung von

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \text{oder} \quad \Delta\phi = -\rho/\epsilon_0$$

(A) Rotationssymmetrische Ladungsverteilung



Kugelkoordinaten

$$g(\vec{r}) = g(r, \theta, \varphi) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Symmetrie}}}{g(r)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{e}_r$$

- nur Radialkomponente $\propto \hat{e}_r$
- diese nur von r abhängig

MWGL

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{g(r)}{\epsilon_0}$$

Wegen der Symmetrie des Problems kann man die Maxwellgleichungen direkt integrieren

V_R = Kugel mit Radius R

$$\int_{V_R} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \oint_{\partial(V_R)} d\vec{A} \cdot \vec{E} = 4\pi R^2 E(R)$$

$$= \int_{V_R} dV \frac{g(r)}{\epsilon_0} = \frac{Q_R}{\epsilon_0}$$

- Q_R - Ladung innerhalb der Kugel mit Radius R

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} Q_r$$

$$Q_r = \int_0^r dr' 4\pi r'^2 g(r')$$

• einzelne Punktladung im Ursprung q

$$g(\vec{r}) = q \delta(\vec{r})$$

$$\int dV g(\vec{r}) = q \int dV \delta(\vec{r}) = q$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

elektr. Feld
einer
Punktladung

• Potential ? $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ $\phi = \phi(r)$

Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla}\phi = \vec{e}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

nur dieser Beitrag

$$-\frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \phi_0$$

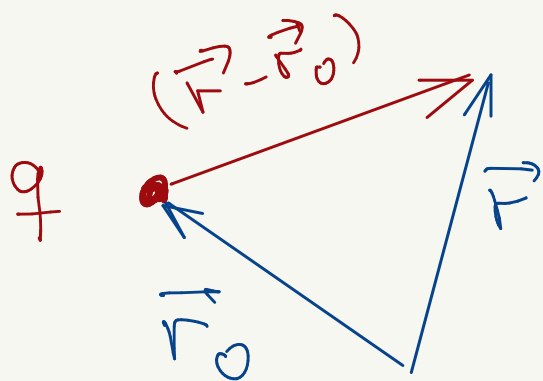
" ϕ_0 " entspricht
Eichfreiheit

Potential einer Punktladung
am Ursprung

- Punktladung am Ort $\vec{r}_0$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|} + \phi_0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = \frac{q (\vec{r} - \vec{r}_0)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$



$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \underbrace{\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}}_{\text{Einheitsvektor von } \vec{r}_0 \text{ nach } \vec{r}}$$

Einheitsvektor von
 $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$

(B) Feld und Potential einer beliebigen Ladungsverteilung

Superpositionsprinzip:

Ensemble von Punktladungen q_j an Orten $\vec{r}_j$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \frac{q_j (\vec{r} - \vec{r}_j)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_j|} + \phi_0$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung

$$\sum_j q_j \longrightarrow \int dV \rho(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$(*) \quad \phi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_0$$

allgemeine Lösung für beliebige Ladungsverteilungen

- nützliche Identität:

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

- Erfüllt $\phi(\vec{r})$ aus (*) die Poisson-Gleichung $\Delta \phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0$?

$$\Delta \phi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

hier wirkt Δ

Ableitung nach $\vec{r}$ = Ableitung nach $\vec{r} - \vec{r}'$ wenn $\vec{r}'$ fix

$\Rightarrow$ es reicht

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = ?$$

in Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \underbrace{r^2 \frac{\partial}{\partial r}} + \text{Ableitungen nach } \vartheta, \varphi$$

$$\boxed{r \neq 0} \quad \underbrace{r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r}} = -r^2 \frac{1}{r^2} = -1$$

$$\text{d.h.} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad \text{für } r \neq 0$$

$$\boxed{r=0} \quad ?$$

betrachten Integral über Kugel mit Radius $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{K_\varepsilon} dV \Delta\left(\frac{1}{r}\right) f(r) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} f(0) \int_{K_\varepsilon} dV \Delta\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Satz von} \\ \text{Gauß}}}{=} f(0) \int_{\partial(K_\varepsilon)} dA \hat{n} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = f(0) \int_{\partial(K_\varepsilon)} dA \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\hat{n} = \hat{e}_r \quad \text{für Kugel}$$

$$= f(0) \int_{\partial(K_\varepsilon)} dA \left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = f(0) \cancel{\varepsilon^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta}_{= 4\pi} \left(-\frac{1}{\cancel{\varepsilon^2}}\right)$$

$$= -4\pi f(0)$$

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r})$$

(c) Kraft zwischen Punktladungen und potentielle Energie



Kraft auf Punktladung q_j

$$\vec{F}_j = q_j \vec{E}(\vec{r}_j)$$

$$= q_j \sum_{e \neq j} \frac{q_e (\vec{r}_j - \vec{r}_e)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_e|^3}$$

Coulomb
Kraft

$$\vec{F}_j = -\vec{\nabla}_j \underbrace{\sum_{e \neq j} \frac{q_j q_e}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_e|}}_{\text{pot. Energie der Ladung } q_j}$$

$$\vec{\nabla}_j = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_e \sum_{j \neq e} \frac{q_j q_e}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_e|}$$

" $\frac{1}{2}$ " damit keine Doppelzählung

potentielle
Energie
des Systems
aus
Punktladungen