XII Elektrodynamik - I

Mechanik: Bewegung von Massenpunkten und MP-Systemen unter Wirkung vorgegebener Kräfte
→ Ursache der Kräfte?

fundamentale Teilchen	fundamentale Kräfte = Felder
Quarks Leptonen	Photonen W, Z Bosonen Gluonen

einheitliche Quantenfeldtheorie der elektro-schwachen und starken Wechselwirkung (WW)

- starke WW (Kernkräfte)
- elektro-schwache WW
  - schwache Wechselwirkung (Radioaktivität)
  - QED
    - klass. Limes
      - klass. Elektrodynamik

Elektrodynamik: Theorie elektromagnetischer Kräfte die durch elektrische Ladungen hervorgerufen werden

XII.1 Allgemeines

(A) elektrisches und magnetisches Feld

- Cavendish, Coulomb ⇒ Kraft auf ruhende Ladung q

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\,\vec{E}(\vec{r})$$

elektrisches Feld

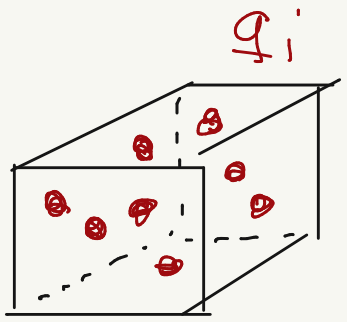
- Ampere, Lorentz ⇒ Kraft auf bewegte Ladung und Ströme

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\,(\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}))$$

magnetisches Feld

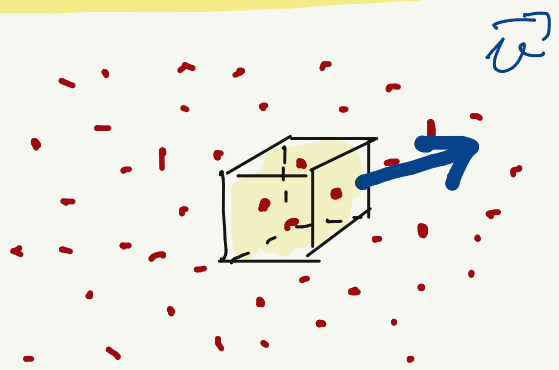
- Ladungsdichte,

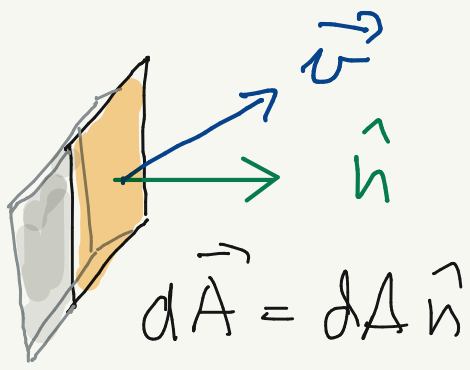
$$\varrho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$



$$\Delta q = \sum_{i \in \Delta V} q_i$$

- Stromdichte





$$\vec{j}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) \cdot \vec{v}$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$dq = \int dF\, \varrho\, \vec{v} \cdot \hat{n}\, dt$$

- **Kraftdichte**

$$\vec{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{dq}{dV}\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$$\boxed{\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}}$$

Lorentz Kraftdichte

XII.2 Maxwellgleichungen

Die grundlegenden Gleichungen elektromagnetischer Felder sind erstmals von Maxwell zusammengestellt worden:

inhomogene MWGL

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ Gauß

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$ Maxwell-Ampere

homogene MWGL

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ (keine magnet. Ladungen)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$ Faraday

↑ Quellen des dm. Feldes

$\varepsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm $\quad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

Linearität der Maxwellgleichungen

$\Rightarrow$ **Superpositionsprinzip**

falls F_1, F_2 Lösung $\Rightarrow$ $F_1 + F_2$ Lösung

Konsistenzbedingung

MWGL sind 8 Gleichungen für 6 Unbekannte $(\vec{E}, \vec{B})$
überbestimmt → Konsistenzbedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$\downarrow$

$$0 \qquad - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$- \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Kontinuitätsgleichung der Ladung

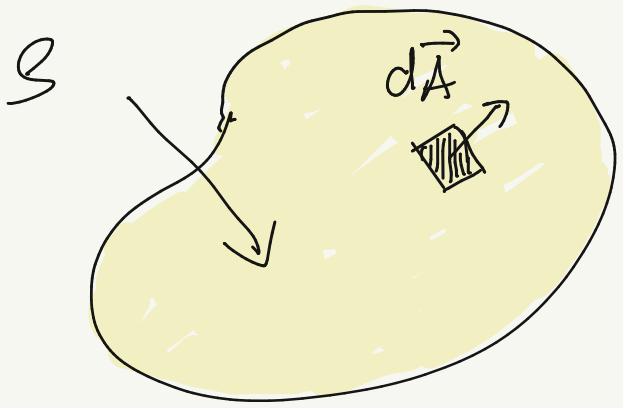
$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = 0$$

$\downarrow$

$$0 \qquad \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

✓ keine neue Bedingung

Bedeutung der Kontinuitätsgleichung



$$-\int_V dV \, \mathrm{div}\,\vec{j} = \int_V dV \frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

$$-\oint\!\!\oint_S d\vec{A}\cdot\vec{j} = \frac{dQ_V}{dt}$$

V Gesamtladung $= Q_V(t)$

I_F: Gesamtstrom durch Oberfläche

zeitliche Änderung der Ladung

$$\boxed{\frac{dQ_V}{dt} + I_F = 0}$$

XII.3 Lösung der homogenen MWGL: elm. Potentiale

(A) skalares und Vektorpotential

homogene Maxwellgleichungen (ohne weitere Randbedingungen) hängen nicht von Ladungen und Strömen ab → allg. Lösung möglich? Ja!

(i) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$

Vektorpotential

einsetzen in zweite homogene MWGL

(ii) $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$

$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$

$= -\vec{\nabla}\phi$

da Rotation eines Gradienten verschwindet !

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

skalares Potential ϕ

$(\vec{E}, \vec{B})$ 2 Vektorfelder, 6 Komponenten

$\downarrow$

$(\vec{A}, \phi)$ 1 Vektorfeld, 1 skalares Feld — 4 Komponenten

(B) Eichtransformationen

Elektrisches und magnetisches Feld sind meßbare physikalische Größen, die Potentiale sind zunächst aber nur mathematische Hilfsgrößen.

Potentiale eindeutig → Nein !

Mögliche Transformation des Vektorpotentials

(*) $\vec{A} \longrightarrow \boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda}$ λ beliebige skalare Funktion

lässt magnetisches Feld $\vec{B}$ unbeeinflusst

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\lambda}_{=0}$$

$$= \vec{B}$$

Wie sieht es mit elektrischem Feld $\vec{E}$ aus?

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \rightarrow \quad \vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \vec{\nabla}\lambda)$$

$$\neq \vec{E}$$

i.A.

Aber falls wir mit $\vec{A}$ auch ϕ transformieren

(**) $\phi \rightarrow \boxed{\phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}}$

gilt $\vec{B}' = \vec{B}$ und $\vec{E}' = \vec{E}$.

Eine solche Transformation (*) und (**) der Potentiale nennt man

Eichtransformation

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Die Freiheit der Eichtransformation kann man nutzen die Lösung elektrodynamischer Probleme zu vereinfachen. Im Rahmen der Elektrostatik die wir in dieser Vorlesung diskutieren beschränken sich Eichtransformationen aber auf triviale Transformationen und werden weniger Bedeutung haben. Die Freiheit der Eichtransformation hat darüberhinaus eine wichtige fundamentale Bedeutung, die Sie aber erst in späteren Vorlesungen kennenlernen und verstehen werden.

XII. 4 Statik

Annahme: keine zeitlichen Änderungen

$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})$ Ladungsdichte

$\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})$ Stromdichte

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

nur elektrisches Feld $\vec{E}$ und Ladung ρ

Elektrostatik

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

nur magnetischen Feld $\vec{B}$ und Stromdichte $\vec{j}$

Magnetostatik