

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{konst}}$$

III.7 Zur Integration dreidimensionaler Probleme mit zeit- und geschwindigkeits-unabhängiger Zentralkraft

betrachten zeit- und geschwindigkeitsunabhängige Zentralkraft

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{p}, t) = F(r) \vec{e}_r$$

(i) $\vec{F}$ ist konservativ $\Rightarrow$ E ist erhalten!

$$E = \frac{m}{2} \vec{v}^2 + V(r) = \text{konst.} \quad \text{eine Bedingung}$$

(ii) Drehmoment bzgl. Ursprung verschwindet

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \underline{\vec{L} \text{ ist erhalten!}}$$

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \text{konst} \quad \text{drei Bedingungen}$$

Man nennt E und $\vec{L}$ erste Integrale der Bewegung

Folgerungen:

Konstanz von $\vec{L}$ beschränkt die Bewegung auf eine Ebene senkrecht zu $\vec{L}$

da $\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times m \dot{\vec{r}}) = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{r} \perp \vec{L}}}$ (siehe oben)

• nun OBD $\vec{L} = L \hat{e}_z \Rightarrow xy \text{ Ebene}$

$\Rightarrow \vec{r} = (r, \vartheta, \varphi) \stackrel{!}{=} (r, \frac{\pi}{2}, \varphi)$

$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi$

$\vec{L} = -m r \hat{e}_r \times (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

$\hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_\vartheta$

$= -m r^2 \dot{\varphi} \hat{e}_\vartheta \Big|_{\vartheta = \frac{\pi}{2}} = m r^2 \dot{\varphi} \hat{e}_z$

$$\vec{L} = m r^2 \dot{\varphi} \hat{e}_z$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2}$$

• mit Energieerhaltung

$v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$

$$E = \frac{m}{2} v^2 + V(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + V(r) = \text{const}$$

wie 1D kinetische Energie

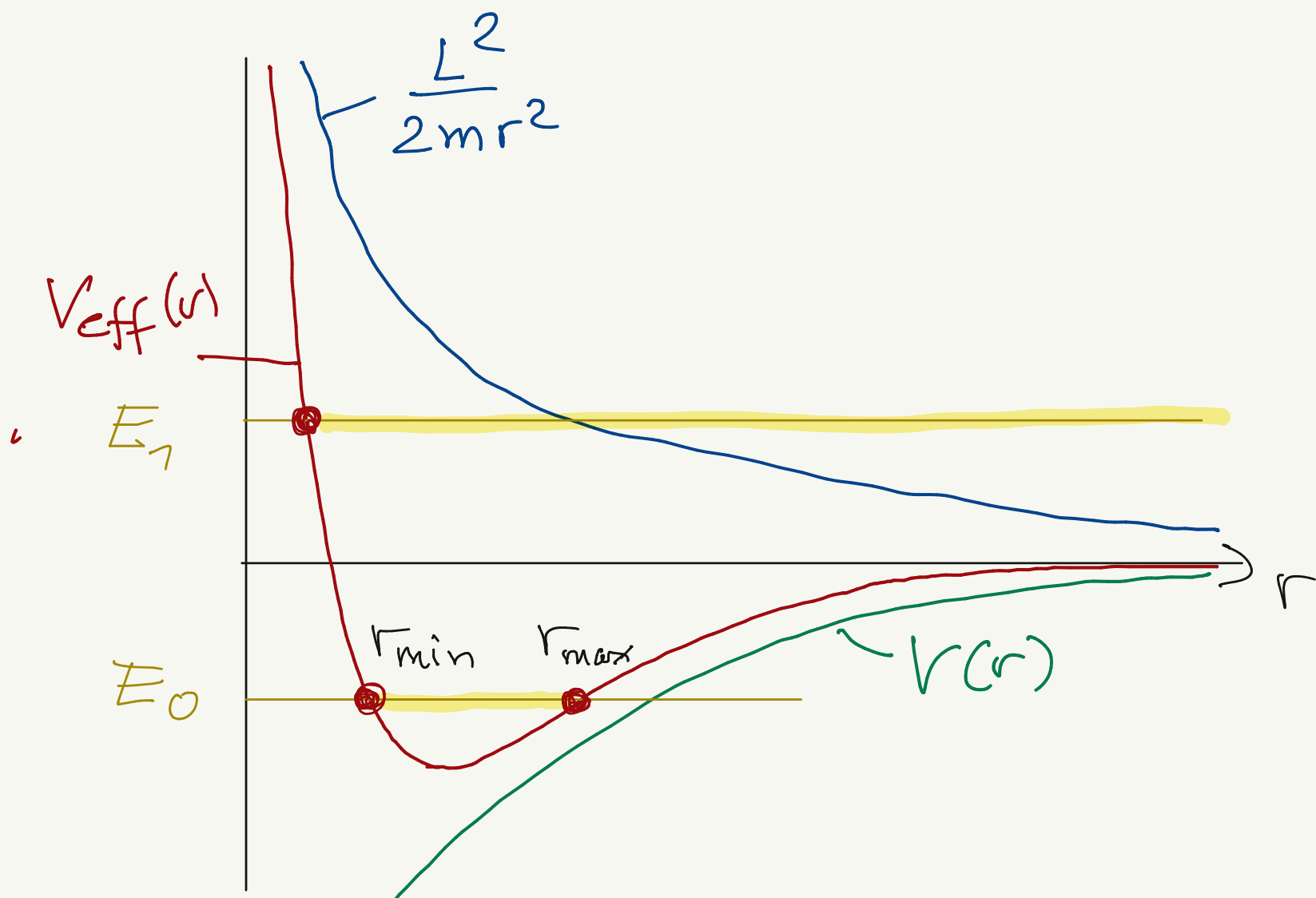
wie effektives 1D Potential

Def: $\frac{L^2}{2mr^2}$ heißt Zentrifugalpotential

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

effektives
Potential
der Radial-
bewegung

$\Rightarrow$ das 3D Problem ist nun auf ein 1D Problem mit $V_{\text{eff}}(r)$ und $0 \leq r \leq \infty$ reduziert 



Folgerungen: (i) erlaubter Bereich

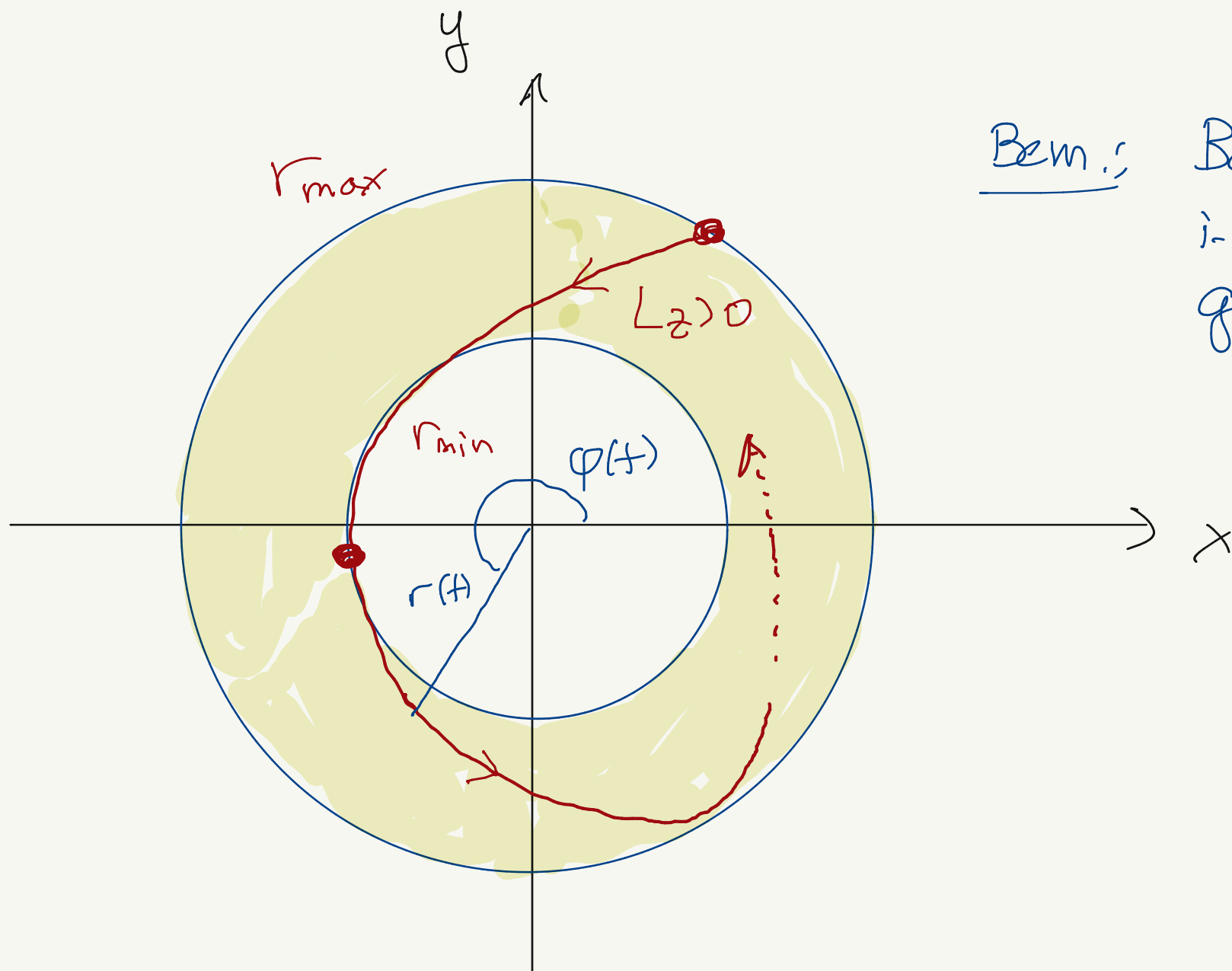
$$E - V_{\text{eff}}(r) \geq 0$$

(ii) Umbkehrradialen der Bewegung

$$E - V_{\text{eff}}(r_0) = 0 \quad \dot{r}_0 = 0$$

betrachten gebundene Bewegung:
 E_0

(x, y) - Ebene
 $(\perp \text{ zu } \vec{L})$



Bem.: Bewegung
i.A. nicht
geschlossen!

Lösung wie in 1D

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}$$

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r'))}} dr'$$

$$\Rightarrow r = r(t)$$

allgemeine
implizite
Lösung der
Bewegung
für $r = r(t)$

außerdem $L = mr^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \varphi = \varphi(r)$ bzw. $r = r(\varphi)$ ($\varphi = \varphi(t)$ ist klar!)

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\dot{r}}$$

$$= \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{L}{r'^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(r'))}} dr'$$

allgemeine implizite Lösung der Bewegung für $r = r(\varphi)$

Anfangsbedingungen

(i) $\vec{r}(t=t_0) = (r_0, \frac{\pi}{2}, \varphi_0)$ (Kugelkoordinaten)

(ii) $\dot{\vec{r}}(t=t_0) = (\dot{r}(t=t_0), 0, \dot{\varphi}(t=t_0))$ (Zylinderkoordin. $\vartheta = \frac{\pi}{2} \rightarrow z=0$)

$$\dot{\varphi}(t=t_0) = \frac{L}{mr_0^2}$$

$$\dot{r}(t=t_0) = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(r_0) + \frac{L^2}{2mr_0^2})}$$

d.h. $r_0, \varphi_0, \vec{L}, E$ ausreichend (6 Größen!)

III. 8 Planetenbewegung

aus $\varphi = \varphi(r)$ können wir eine Bedingung für die Existenz einfach geschlossener Bahnen ableiten

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(r))}} dr = \frac{\pi}{2}$$

↑
Fehler im Skript

Die Zeit zwischen $r_{\max}$ und $r_{\min}$ ergibt sich

$$T = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}} dr$$

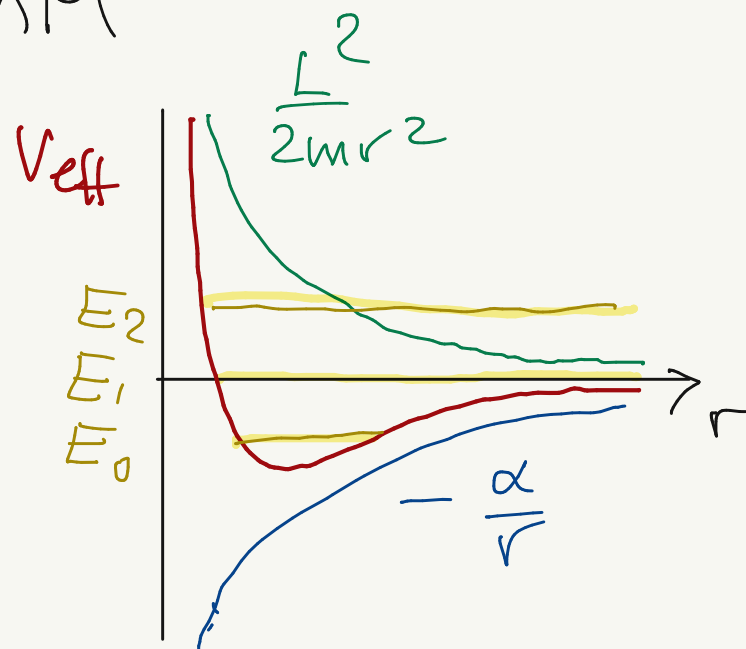
Betrachten wir ein spezielles Zentralpotential
(Coulombpotential einer Punktladung
Gravitationspotential eines (näherungsweise)
punktförmigen Zentralgestirns)

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \alpha = \gamma m M$$

Zentralpotential

$\Rightarrow E$ und $\vec{L}$ erhalten!

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$



außen $\vec{L} = L \vec{e}_z$ (OBA) Zylinderkoordinaten

$$L = m r^2 \dot{\varphi}$$

• Was ist $r = r(\varphi)$? definieren $s = \frac{1}{r}$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dt}{d\varphi} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\varphi}}$$

$$= -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{m r^2}{L}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{ds}{d\varphi} \quad \text{Einsetzen in Energiesatz}$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left| E + \alpha s = \frac{m}{2} \left[-\frac{L}{m} \frac{ds}{d\varphi} \right]^2 + \frac{L^2}{2m} s^2 \right.$$

$$= \frac{L^2}{2m} \left[\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right]$$

$$0 + \alpha s' = \frac{L^2}{2m} [2s's'' + 2s's']$$

$$\Rightarrow s'' + s = \frac{m\alpha}{L^2}$$

Dies ist eine (inhomogene) lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Über die Lösung solcher werden wir uns noch zuerkhalten (nächste Woche). Ihre Lösung ist

$$S(\varphi) = A \sin \varphi + B \cos \varphi + \frac{m\alpha}{L^2}$$

check: $S'' = -A \sin \varphi - B \cos \varphi$

$$\Rightarrow S'' + S = \cancel{-A \sin \varphi} - \cancel{B \cos \varphi} + \cancel{A \sin \varphi} + \cancel{B \cos \varphi} + \frac{m\alpha}{L^2} \quad \checkmark$$

A, B müssen aus Anfangsbedingungen bestimmt werden

OBA: sonnennächster Punkt
(Perihel) bei $\varphi = 0$

$$S = S_{\max}$$

$$\left. \frac{dS}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} \stackrel{!}{=} 0 = (A \cos \varphi - B \sin \varphi) \stackrel{!}{=} A \quad \varphi=0$$

$$\left. \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = -A \sin \varphi - B \cos \varphi \stackrel{!}{=} -B \stackrel{!}{\leq} 0 \quad \varphi=0$$

$$S = \frac{1}{r} = S_{\max} \quad r_{\min}$$

$$\Rightarrow B > 0$$

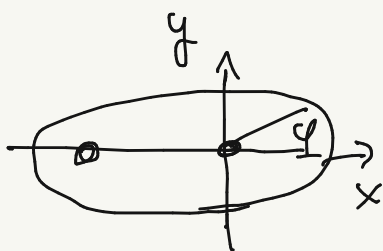
Das liefert die Bahnkurve

$$S = \frac{1}{r} = B \cos \varphi + \frac{m\alpha}{L^2}$$

Abkürzung

$$k = \frac{L^2}{m\alpha}$$

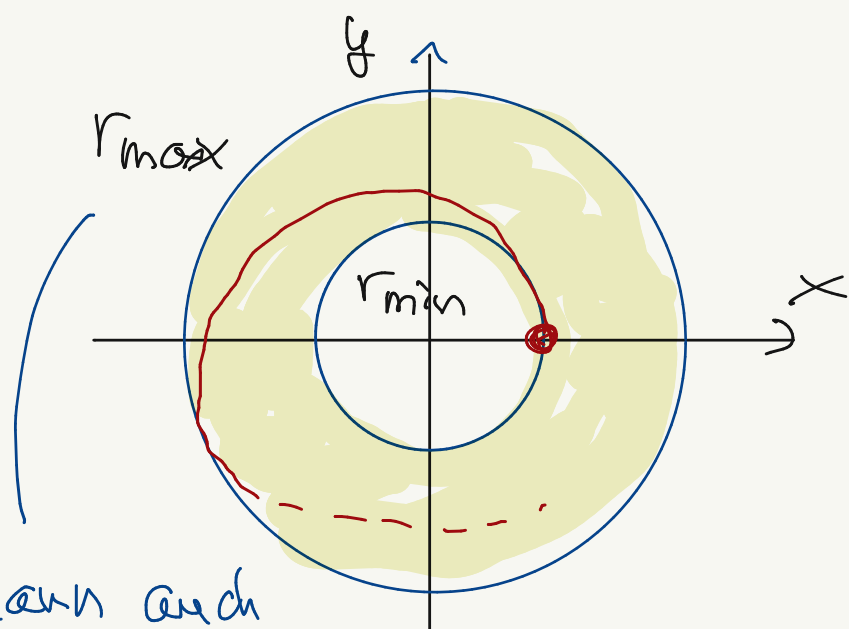
$$\varepsilon = Bk \geq 0$$



$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

Kegelschnitt im
Breunpunktssystem

kann auch
 ∞ sein



⇒ siehe Zusatzvideo "Kegelschnitte"
falls nicht aus Schule bekannt

$$\varepsilon = 0$$

$$\varepsilon < 1$$

$$\varepsilon = 1$$

$$\varepsilon > 1$$

Kreis

Ellipse

Parabel

Hyperbel

$$E = E_{\min}$$

$$E_{\min} < E \leq 0$$

$$E = 0$$

$$E > 0$$

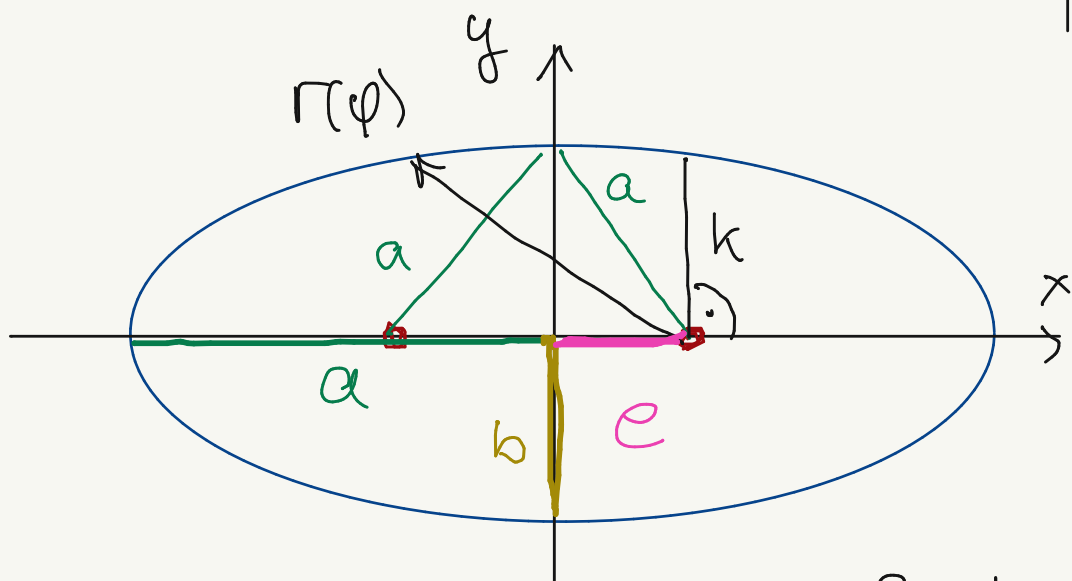
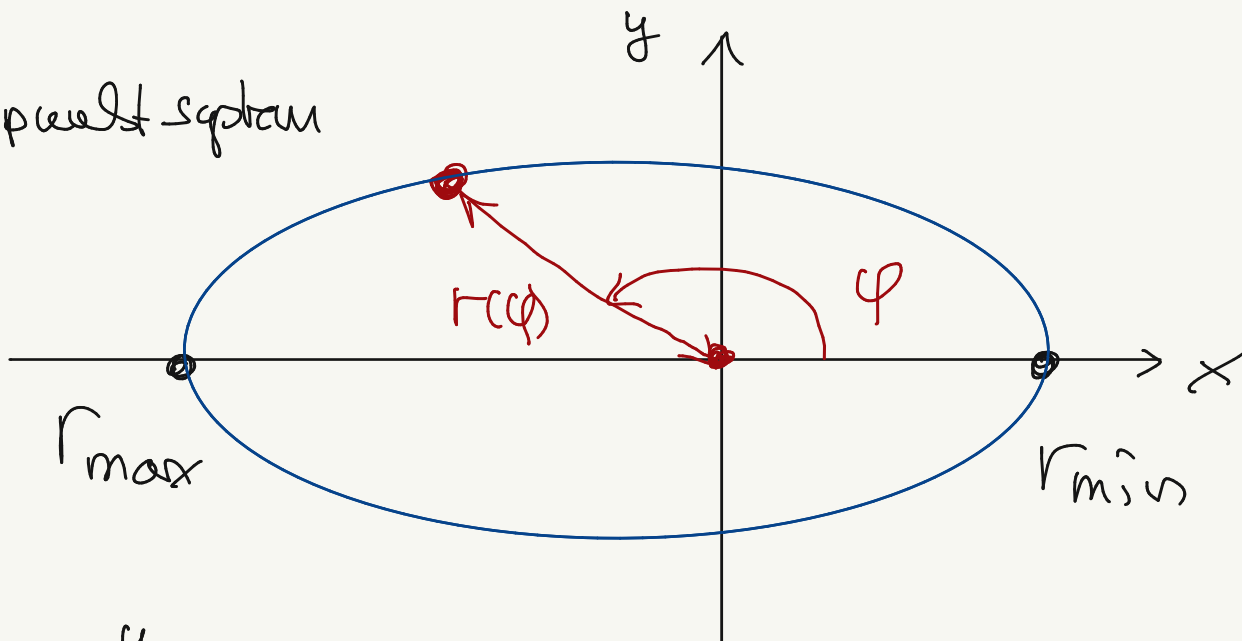
$$0 \leq \varepsilon < 1$$

$$\exists \quad r_{\min} = \frac{k}{1 + \varepsilon}$$

$$r_{\max} = \frac{k}{1 - \varepsilon}$$

} beidseitig
gebundene
Bewegung

Sog. Brennpunktsystem



Ellipse: alle Punkte in einer Ebene deren Summe der Abstände zu zwei Punkten (Brennpunkten) konstant ist $= 2a$

$a =$ große Halbachse

$b =$ kleine Halbachse

$\varepsilon =$ Exzentrizität

$$r_{\min} = a - e = \frac{k}{1 + \varepsilon}$$

$$r_{\max} = a + e = \frac{k}{1 - \varepsilon}$$

$$\Rightarrow a = \frac{k}{1 - \varepsilon^2}$$

$$e = \frac{k\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

$$\text{und } r_{\min} r_{\max} = a^2 - e^2 = \frac{k^2}{1 - \varepsilon^2} = ka \quad \left(k = \frac{L^2}{m\alpha} \right)$$

es gilt

$$E = \frac{\cancel{m\dot{r}^2}}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad \Big|_{r=r_{\min}} = \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} - \frac{\alpha}{r_{\min}}$$

$$= \alpha \left(\frac{k}{2r_{\min}^2} - \frac{1}{r_{\min}} \right) = \alpha \frac{ak - 2r_{\min}a}{2r_{\min}^2 a}$$

$$= \alpha \frac{a^2 - e^2 - 2a(a - e)}{2(a - e)^2 a} = -\frac{\alpha}{2a}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{\alpha}{2E}$$

große Halbachse nur durch Energie bestimmt

$$b^2 = a^2 - e^2 = r_{\min} r_{\max} = ka$$

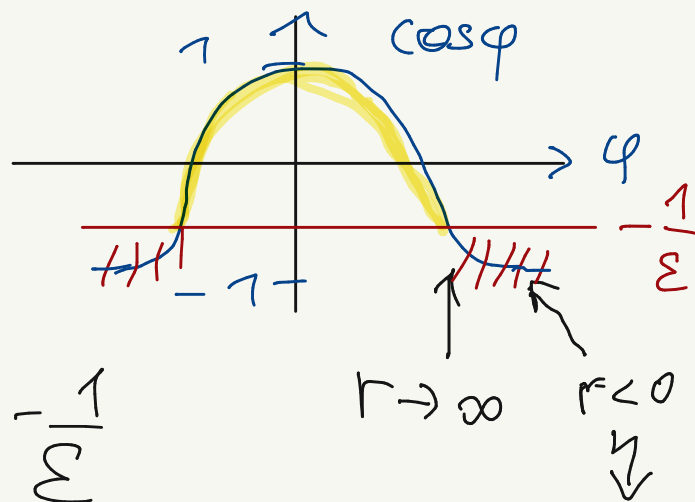
$$b^2 = -\frac{\overbrace{a}^{\alpha}}{\cancel{\alpha}} \frac{\overbrace{L^2}^k}{2Em\cancel{\alpha}}$$

$$\underline{\underline{b = \frac{L}{\sqrt{-2Em}}}}$$

kleine Halbachse durch E und L bestimmt

$$\boxed{\varepsilon > 1}$$

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

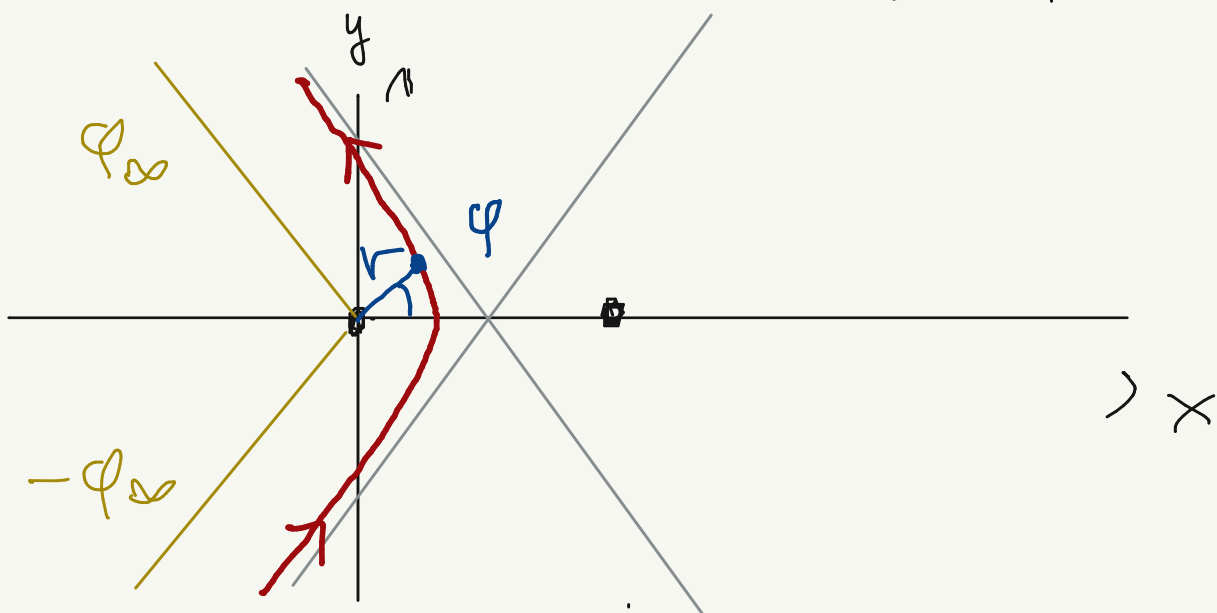


$$\cos \varphi > -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\cos \varphi_{\infty} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\varphi \rightarrow \varphi_{\infty}$$

$$r \rightarrow \infty$$



• Stoßparameter d

• Streuwinkel ϑ

$$\pi - \vartheta = 2(\pi - \varphi_{\infty}) \Rightarrow \frac{\vartheta}{2} = \varphi_{\infty} - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin(\varphi_{\infty} - \frac{\pi}{2}) = -\cos \varphi_{\infty} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\underline{\underline{\sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\varepsilon}}}$$

Energie

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}_{\infty}^2$$

Drehimpuls

$$L = m d |\dot{r}_{\infty}|$$

$$\left. \begin{array}{l} E = \frac{m}{2} \dot{r}_{\infty}^2 \\ L = m d |\dot{r}_{\infty}| \end{array} \right\} L^2 = 2m E d^2$$

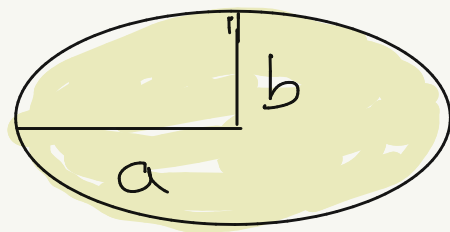
$$\underline{\underline{d = \frac{L}{\sqrt{2mE}}}}$$

Keplersche Gesetze

1. Die Planeten bewegen sich auf Elliptenbahnen in einer Ebene mit der Sonne als Brennpunkt
2. Der Fahrstrahl zw. Sonne überschreißt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
(das war der Flächensatz bei Drehimpulserhaltung)
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die 3. Potenz der großen Halbachsen

Beweis 3. Kepler Gesetz

Fläche Ellipse $A = \pi ab$



$$A = \pi a \frac{L}{\sqrt{-2Em}}$$

andererseits aus Flächensatz

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2m} \vec{L} = \frac{L}{2m} \hat{e}_z$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad A = \frac{L}{2m} T_p$$

$$\Rightarrow T_p = \pi a \sqrt{\frac{2m}{-E}} = \pi a \sqrt{\frac{4ma}{\alpha}}$$

es war
($a = -\frac{\alpha}{2E}$)

$$\boxed{\frac{T_p^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha}}$$

Bem: Dass die gebundenen Bahnen bei der Planetenbewegung geschlossene Bahnen sind, ist eine Besonderheit des Potentials $V(r) \sim -\frac{1}{r}$

Runge-Lenz Vektor

$$\vec{A} = \vec{r} \times \vec{L} - \frac{\alpha}{r} \vec{r}$$

Betrachten seine zeitliche Änderung

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} + \frac{\alpha}{r^2} \dot{r} \vec{r} - \frac{\alpha}{r} \dot{\vec{r}}$$

Nun ist

$$m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L}$$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r}$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{L} = -\frac{m\alpha}{mr^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

$$= -\frac{\alpha}{r^3} \left[\vec{r} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} (\vec{r} \cdot \vec{r}) \right] = -\frac{\alpha}{r^3} (r \dot{r} \vec{r} - r^2 \dot{\vec{r}})$$

$$= -\frac{\alpha}{r^2} \dot{r} \vec{r} + \frac{\alpha}{r} \dot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = 0}$$

Runge-Lenz Vektor
ist eine Erhaltungsgröße
für ein Potential $\sim -\frac{1}{r}$

U.A.: Richtung von $\vec{A} \parallel$ Hauptachse

$$|\vec{A}| = \alpha \varepsilon$$

III.9 Der Virialsatz

lex secunda

$$\vec{r} \cdot \frac{d}{dt} \left(m \vec{v} \right) = \vec{r} \cdot \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt} (m \vec{r} \cdot \vec{v}) - m \vec{v}^2 = \vec{r} \cdot \vec{F}$$

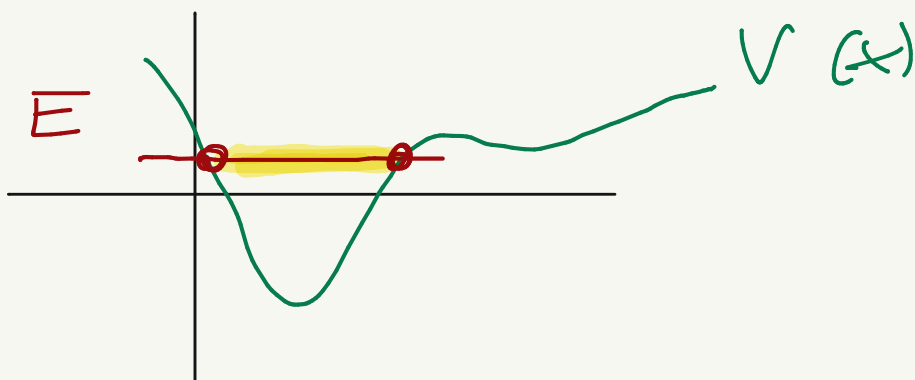
Annahme: konservative Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

$$\frac{d}{dt} (m \vec{r} \cdot \vec{v}) - m \vec{v}^2 = -\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r})$$

betrachten zeitliches Mittel

$$\overline{f}^t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt f(t)$$

gebundene Bewegung in einem konservativen Potential ist periodisch



für periodische Funktionen $f(t+T_p) = f(t)$ gilt

$$\overline{f}^t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt f(t) = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} dt f(t)$$

$$\Rightarrow \overline{\frac{d}{dt} (m \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}^t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{d}{dt} (m \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \\ = \frac{1}{T_p} m \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \Big|_0^{T_p} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{m \dot{\vec{r}}^2}^t = \overline{\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r})}^t$$

Def: Die Größe $\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r})$ heißt Virial des Potentials $V(\vec{r})$

Satz: Virialsatz

$$2 \overline{T}^t = \overline{\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r})}^t$$

gebundene Bewegung



Falls das Potential eine sog. homogene Funktion des Ortes ist, d.h. falls

$$V(\vec{r}) = V(r) = a r^\ell \quad \ell \in \mathbb{Z}$$

d.h. $\ell \in \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}) = r \frac{\partial}{\partial r} V(r) = r \ell a r^{\ell-1} \\ = \ell V(r)$$

$$2 \overline{T}^t = \ell \overline{V}^t$$

Beispiel:

(i) isothermer harmonischer Oszillator $V(r) = \frac{m}{2} \omega^2 r^2$

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V = 2V$$

$$\underline{\underline{\overline{T}^t = \overline{V}^t}}$$

(ii) Coulomb- bzw. Gravitationspotential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V = -V$$

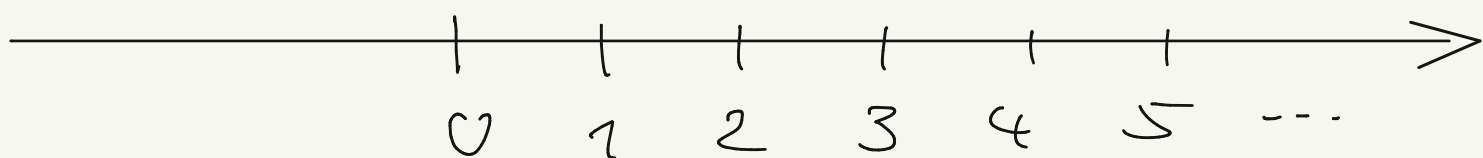
$$\underline{\underline{2\overline{T}^t = -\overline{V}^t}}$$

IV. Komplexe Zahlen

IV.1 Zahlensysteme; komplexe Zahl

• natürliche Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{N}$$



➡ Addition ausführbar, Subtraktion meist immer
⇓