

$$f(A) \vec{x} = \sum_n f(\lambda) C_n \vec{x}_n$$

Vorsicht bei Rechenoperationen

$$e^A \cdot e^B \neq e^{A+B} \quad \text{falls } [A, B] \neq 0$$

i.A.

IX. Systeme linearer Differentialgleichungen

Eine Anwendung des Matrixkalküls ist die Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

IX.1 Allgemeines

- Newtons Gleichung für 1 dim. harmonischen Oszillator im Phasenraum

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{y} = A \vec{y} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{y}(t) = \exp(A(t-t_0)) \vec{y}(t_0)}}$$

mit A-B $\vec{y}(t_0)$

Wie haben wir e^{At} zu verstehen? $\Rightarrow$ Taylorreihe

$$e^{At} = \underbrace{1 + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots}_{\text{Summe von Produkten aus Matrizen}}$$

Summe von Produkten
aus Matrizen

• Symmetrische Matrizen

$\underline{y}$: n-dim Vektor

$$\frac{d}{dt} \underline{y} = A \underline{y}$$

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Sei $A = A^T$ (und $\frac{dA}{dt} = 0$; d.h. nicht zeitabhängig)

$$\Rightarrow \exists Q \text{ so dass } A = Q \Lambda_{\text{diag}} Q^{-1}$$

$$\text{mit } \Lambda_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \underline{y} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} \underline{y}$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{Q^{-1} \underline{y}}_{=\underline{y}'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \underbrace{Q^{-1} \underline{y}}_{=\underline{y}'}$$

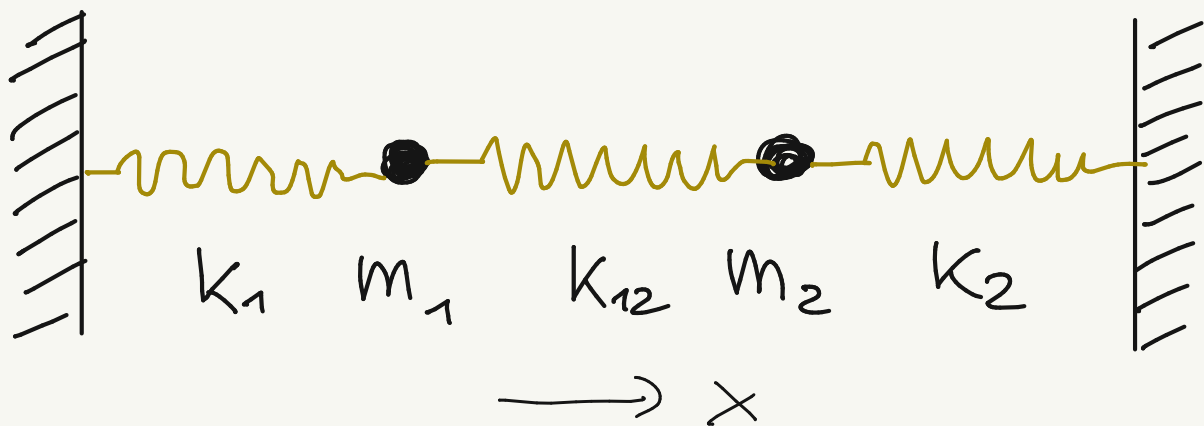
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{y}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \underline{y}'$$

$$\ddot{y}_1' = \lambda_1 y_1' \Rightarrow y_1'(t) = e^{\lambda_1(t-t_0)} y_1'(t_0)$$

$$\ddot{y}_2' = \lambda_2 y_2' \Rightarrow y_2'(t) = e^{\lambda_2(t-t_0)} y_2'(t_0)$$

etc. $\Rightarrow$ einfache Lösung
durch Diagonalisierung

IX.2 Anwendung: gekoppelte Oszillatoren



Ruhelagen x_{10}, x_{20}

$$F_1^{(ext)} = -k_1(x_1 - x_{10}) \quad V_1(x_1) = \frac{k_1}{2}(x_1 - x_{10})^2$$

$$F_2^{(ext)} = -k_2(x_2 - x_{20}) \quad V_2(x_2) = \frac{k_2}{2}(x_2 - x_{20})^2$$

Wechselwirkungskraft

$$F_{12} = -k_{12}[(x_1 - x_{10}) - (x_2 - x_{20})] = -F_{21}$$

d.h.

$$V_{12} = \frac{k_{12}}{2}[(x_1 - x_{10}) - (x_2 - x_{20})]^2$$

- Auslenkung aus Ruhelage $y_i = x_i - x_{i0}$

- Newtonsche Gleichungen in Matrixform

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

↑
Symmetrische Matrix $\Rightarrow$ Diagonalisierung?

Problem: $\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ wird bei Diagonalisierung nicht diagonal bleiben

$\Rightarrow$ Transformation

$$z_i = \sqrt{m_i} y_i$$

✓ Fehler in Skript!

$$\begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} (k_1 + k_{12}) & -\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} k_{12} \\ -\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} k_{12} & +\frac{1}{m_2} (k_2 + k_{12}) \end{pmatrix}}_{\text{symmetrische Matrix} = R^2} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{z}} + R^2 \vec{z} = 0$$

Ansatz $\vec{z} = \vec{a} e^{i\omega t}$

charakteristische Gleichung

$$(\Omega^2 - \omega^2 \mathbb{1}) \vec{z} = (\Omega^2 - \omega^2 \mathbb{1}) \vec{a} e^{i\omega t} = 0$$

$\Rightarrow$ EV Gleichung:

$$(\Omega^2 - \omega^2 \mathbb{1}) \vec{a} = 0$$

$\omega \rightarrow$ Eigenwerte von Ω^2

$\vec{a} \rightarrow$ Eigenvektoren von Ω^2

X. Inertialsysteme und Nichtinertialsysteme

X.1 Inertialsysteme und Galileitransformation

Lex prima: $\exists$ ein Inertialsystem

Lex secunda: in einem Inertialsystem: $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$
($m = \text{konst}_t$)

► Transformation zwischen Inertialsystemen?

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow \vec{r}' = R \vec{r} + \vec{u} t + \vec{a} \\ t &\rightarrow t' = \lambda t + t_0 \end{aligned}$$

R orthogonale
Matrix in $\mathbb{R}^3$
 $R, \vec{u}, \vec{a}$ konstant t