

VIII. Matrizen

VIII.1 Motivation: Lineare Gleichungssysteme

Bei der Behandlung physikalischer Probleme stoßen wir oft auf Systeme linearer Gleichungen.

Bspl.
$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 6 & (i) \\ x + 2y &= 1 & (ii) \end{aligned}$$

Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin sukzessive nach Variablen aufzulösen:

$$(ii) \Rightarrow x = 1 - 2y \quad \text{in (i) einsetzen}$$

$$\begin{aligned} 3(1-2y) + 5y &= 6 \\ \Rightarrow 3 - y &= 6 \quad \Rightarrow y = \underline{\underline{-3}} \Rightarrow x = \underline{\underline{7}} \end{aligned}$$

Das wird schnell aufwendig !!



Jetzt wollen wir ein wesentlich effizienteres Verfahren kennenlernen. Betrachten z.B. 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten x, y, z

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ (*) \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 x + c_2 z &= d_3 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (*) können wir durch Einführung von Spaltenvektoren schreiben als

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$(*) \Rightarrow \boxed{x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}}$$

allgemeine Linearkombination
von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^3$
mit Basis $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

(falls diese linear unabhängig)

vorgegebener Vektor
im $\mathbb{R}^3$

Man erkennt:

- falls $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig
existiert genau eine Lösung, nämlich Darstellung von
 $\vec{d}$ in Basis $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
- falls $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig
existiert entweder keine Lösung oder unendlich viele.

Bspl: $\vec{b} = 2\vec{a}$

$$(x + 2y)\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$$

- falls $\vec{d}$ Komponente senkrecht zu $\vec{b}, \vec{c}$ hat
 $\Rightarrow$ keine Lösung
- falls $\vec{d} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} \Rightarrow z = \beta$ ∞ Lösungen
 $x + 2y = \alpha$

Wir können die Koeffizienten x, y, z wie folgt bestimmen

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$$

$$x\vec{b} \mid \rightarrow x(\vec{a} \times \vec{b}) + z(\vec{c} \times \vec{b}) = (\vec{d} \times \vec{b})$$

$$\cdot \vec{c} \mid \rightarrow x(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{d} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(\vec{d} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}$$

analog können wir für die anderen Koeffizienten y (erst " $x\vec{c}$ " dann " $\vec{a}$ ") und z (erst " $x\vec{a}$ " dann " $\vec{b}$ ") verfahren

$$y = \frac{(\vec{d} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}}{(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}} = \frac{(\vec{a} \times \vec{d}) \cdot \vec{c}}{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}$$

zykl. tauschen

$$z = \frac{(\vec{d} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}}{(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}}{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}$$

(A) Determinanten

Bei der Berechnung des Spatproduktes hatten wir bereits den Begriff der Determinante gehört

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1 + a_2 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Regel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

2x2 Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

3x3 Determinante

Def: $n \times n$ Determinante

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\text{Permutationen} \\ \{j_1, \dots, j_n\}}} (-1)^p a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$$

$$1, 2, 3, \dots, n \rightarrow j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$$

p : Anzahl der
paarweisen
Vertauschungen

z.B.: $1, 2, 3, 4 \xrightarrow{1} 1, 2, 4, 3 \xrightarrow{2} 4, 2, 1, 3 \quad p=2$

Eigenschaften

(1) Multipliziert man jedes Element einer Determinante mit einem Faktor λ ändert sich die Determinante um λ^n

$$D[\lambda a_{ij}] \rightarrow \lambda^n D[a_{ij}]$$

(2) Vertauschung zweier Zeilen oder zweier Spalten ändert das Vorzeichen: $D \rightarrow -D$

(3) Addiert man zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen ändert sich der Wert der Determinante nicht. Das gleiche gilt für Spalten.

(4) Vertauscht man Zeilen und Spalten einer Determinante ändert sich der Wert nicht. (Das nennt man "Transponieren")

Mit diesen Regeln kann man eine Determinante in Dreiecksform bringen, die das Produkt der Diagonalelemente ist

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Dasselbe gilt für die transponierte Determinante

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & a_{33} & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

(B) Lösung von Gleichungssystemen

Kommen wir auf unser lineares Gleichungssystem zurück

$$x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c} = \vec{d}$$

so lassen sich die Lösungen wie folgt durch Determinanten schreiben

$$x = \frac{\det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \quad y = \frac{\det(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \quad z = \frac{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

wobei

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{Transponieren}$$

Ganz allgemein gilt für Gleichungssysteme aus n Gleichungen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = d_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = d_2$$

⋮

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = d_n$$

$$x_k = \frac{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{d}, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n)}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)}$$

für $k = 1, 2, \dots, n$

• $\neq$ Lösung falls

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = 0$$

(außer falls dann auch
 $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{d}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0 \quad \forall b$)

VIII.2 Matrizen

Wir haben im letzten Abschnitt quadratische Schemata von Zahlen kennengelernt. Dies wollen wir jetzt auf rechteckige Schemata erweitern die wir

$n \times m$ Matrix

nennen wollen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}} \right\} n \text{ Zeilen} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ Spalten}} \end{matrix}$$

Die a_{nm} heißen Elemente der Matrix

→
Zeilen



Spalten index

"Zeilen zuerst
Spalten später"

- Zwei Matrizen A und B (manchmal A , B) sind gleich, wenn alle Matrixelemente gleich sind

$$A = B \quad (\Leftrightarrow) \quad a_{ij} = b_{ij}$$

- Falls $n=m$ ist die Matrix eine quadratische Matrix

- Eine $(n \times 1)$ Matrix ist ein Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- Eine $(1 \times m)$ Matrix ist ein Zeilenvektor

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m)$$

- Vertauschen von Zeilen und Spalten einer Matrix heißt transponierte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$n \times m$ Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ & & \ddots & \\ a_{1m} & a_{2m} & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ Matrix

(A) Rechenoperationen mit Matrizen

Man kann Rechenoperationen mit Matrizen definieren

$$A \leftrightarrow a_{ij} \quad B \leftrightarrow b_{ij} \quad C \rightarrow c_{ij}$$

Addition (elementweise Addition) $A, B: (n \times m) \text{ Matrix}$

$$C = A + B \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Multiplikation mit komplexer Zahl (elementweise Multiplikation)

$$\lambda A \leftrightarrow \lambda a_{ij}$$

Matrixmultiplikation

$$A: (n \times \overset{\text{gleich!}}{m}) \quad B: (\overset{\text{gleich!}}{m} \times p) \text{ Matrix}$$

$$C = A \cdot B$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

Man erkennt der Wert c_{ij} ist das Skalarprodukt des i 'ten Zeilenvektors der Matrix A mit dem j 'ten Spaltenvektor von B

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_m \cdot \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \Bigg\}^m$$

- Falls A, B quadratische Matrizen kann man sowohl $A \cdot B$ als auch $B \cdot A$ bilden

Beispiel:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Matrixmultiplikation
ist nicht
kommutativ

Kommutator

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$$

Transposition eines Produktes

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$A: (n \times m)$ Matrix
 $B: (m \times p)$ Matrix

$A \cdot B: (n \times p)$ Matrix
 $(A \cdot B)^T: (p \times n)$ Matrix

Bew:

$$(A \cdot B)^T_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k b_{ki} a_{jk} = (B^T \cdot A^T)_{ij} \quad \checkmark$$

lineares Gleichungssystem als Matrixoperation

Ein lin. Gleichungssystem kann
als Produkt einer $(n \times n)$ Matrix A
und eines Spaltenvektors $\vec{x}$

d.h. einer $(n \times 1)$ Matrix aufgefasst werden

$$A \vec{x} = \vec{d}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{quadratische Matrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

(B) Quadratische Matrizen

A, B ($n \times n$) Matrizen $\Rightarrow$

$$C = \alpha A + \beta B \quad (n \times n) \text{ Matrix}$$

$$C = A \cdot B \quad (n \times n) \text{ Matrix}$$

aber $A \cdot B \neq B \cdot A$ nicht kommutative Algebra

• Einheitsmatrix

$$\mathbb{1} = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

• es gilt

$$\mathbb{1} \cdot A = A \cdot \mathbb{1} = A$$

• Wir hatten bereits gesehen, daß wir für quadratische Zahlenschemata, die wir jetzt als Matrizen identi-

fiziert haben die Determinante bilden können

$$|A| \equiv \det(A)$$

Es gilt

$$|A^T| = |A|$$

Vertauschen von
Zeilen und Spalten

$$|AB| = |BA| = |A| |B|$$

• inverse Matrix

Für eine (quadratische) Matrix A mit $|A| = \det A \neq 0$ existiert eine Matrix A^{-1} , inverse Matrix genannt mit

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}$$

Die Kenntnis der inversen Matrix erlaubt die Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$A \vec{x} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

• Bestimmung der inversen Matrix

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}$$

$$A \hat{=} a_{ij} \quad A^{-1} \hat{=} \tilde{a}_{ij}$$

= Lösung von n linearen Gleichungssystemen:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\parallel$ $\vec{a}_1$ $\parallel$ $\vec{e}_1$ etc.

$$\Rightarrow A \vec{\tilde{a}}_j = \vec{e}_j \quad \text{siehe lineare Gl.-Systeme}$$

$$\tilde{a}_{jk} = \frac{\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{e}_j, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n)}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)}$$

D.h.

$$\tilde{a}_{jk} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nk-1} & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$\tilde{a}_{jk} = (-1)^{j+k} \frac{\det A_{kj}}{\det A} = \frac{\text{adj } A}{\det A}$$

Hierbei ist A_{jk} die Untermatrix von A bei der die j -te Zeile und die k -te Spalte gestrichen werden

$$A_{jk} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,k} & \dots & a_{j-1,n} \\ \hline a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \dots & a_{j+1,k} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & \dots & 1k-1 & | & 1k+1 & \dots & 1n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ j-11 & \dots & j-1k-1 & | & j-1k+1 & \dots & j-1n \\ \hline j+11 & \dots & j+1k-1 & | & j+1k+1 & \dots & j+1n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n1 & \dots & nk-1 & | & nk+1 & \dots & nn \end{pmatrix}$$

• 2x2 Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(C) Eigenwerte und Eigenvektoren

Def: Durch die Gleichung

$$A \vec{x}_\lambda = \lambda \vec{x}_\lambda \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

wird ein Eigenvektor $\vec{x}_\lambda$ und ein Eigenwert λ definiert.
(EV) (EW)

- Man sieht daß falls $\vec{x}_\lambda$ ein EV von A ist, so ist auch $\alpha \vec{x}_\lambda$ ein EV, d.h. wenn es EVs gibt dann immer ∞ viele

$\Rightarrow$ Bestimmung eines minimalen linear unabhängiger EV?

$\Rightarrow$ $(A - \lambda I) \vec{x}_\lambda = 0$ homogenes
lin. GLS

falls $\det(A - \lambda I) \neq 0 \Rightarrow$ eindeutige Lösung $\vec{x}_\lambda \equiv 0$ d.h. uninteressante Lösung

$(*) \Rightarrow \boxed{\det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0}$ charakteristische Gleichung

nur für bestimmte Werte von λ erfüllt! Dies sind die ebenfalls gesuchten Eigenwerte

$(*)$ ist ein Polynom n'ten Grades in λ ($A: (n \times n) \text{ Matrix}$)

$$\det(A - \lambda I) = c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \dots + (-1)^n \lambda^n$$

$$= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ Eigenwerte

Die Eigenvektoren sind durch die Lösung der linearen Gleichung

$$(A - \lambda_k \mathbb{I}) \vec{x}_k = 0$$

gegeben. Da per Konstruktion $\det(A - \lambda_k \mathbb{I}) = 0$ können wir die Gleichung nicht wie im letzten Kapitel besprochen lösen.

- Da mit $\vec{x}_k$ auch $\alpha \vec{x}_k$ Lösung, können wir fordern

$$\boxed{\|\vec{x}_k\| \stackrel{!}{=} 1} \quad \text{d.h.} \quad \sqrt{x_{k1}^2 + x_{k2}^2 + \dots + x_{kn}^2} \stackrel{!}{=} 1$$

→ Dies legt eine Komponente fest, z.B. x_{kn}

- Reduktion des homogenen LGS n'ten Grades auf ein inhomogenes LGS vom Grad $(n-1)$

$$(A - \lambda \mathbb{I}) \vec{x}_k = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix} = 0$$

ist z.B. identisch zu

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \vdots \\ x_{kn-1} \end{pmatrix} = -x_{kn} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn}-\lambda \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ liefert $x_{k1}, \dots, x_{kn-1}$ als
Funktion von x_{kn} ; dann Normierung

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht symmetrisch!

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_+ = 3}} \quad \underline{\underline{\lambda_- = -1}} \quad \text{Eigenwerte}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_+ & 4 \\ 1 & 1-\lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{+1} \\ x_{+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$

$$(1-\lambda_+) x_{+1} = -4 x_{+2}$$

$$-2 x_{+1} = -4 x_{+2}$$

$$\underline{\underline{x_{+1} = 2 x_{+2}}}$$

d.h. $\vec{x}_+ = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{x}_+\| = \sqrt{4\alpha^2 + \alpha^2} = \alpha\sqrt{5} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{x}_+ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad \text{analog} \quad \underline{\underline{\vec{x}_- = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

zu $\lambda_+ = 3$ zu $\lambda_- = -1$

es ist $\vec{x}_- \cdot \vec{x}_+ = -\frac{3}{5}$ nicht orthogonal

(D) reelle, symmetrische Matrizen



Satz Die EW einer reellen, symmetrischen Matrix sind reell

Beweis: $A = (a_{ij})$ symmetrisch $A^T = A$
 $a_{ij} = a_{ji}$
 charakterist. Gleichung

$$\sum_j (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\sum_i x_i^* \mid \sum_{i,j} (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_i^* x_j = 0 \quad (*)$$

komplexe Konjugation von (*)

$$\sum_{i,j} (a_{ij} - \lambda^* \delta_{ij}) x_i x_j^* = 0$$

mit $a_{ij} = a_{ji}$ (und $\delta_{ij} = \delta_{ji}$)

$$\sum_{i,j} (a_{ji} - \lambda^* \delta_{ji}) x_j^* x_i = 0$$

identisch
zu (*)
mit $\lambda \rightarrow \lambda^*$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda = \lambda^*}} \quad \square$$

Bsp!:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$A^T = A$ symmetrisch!

EW:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) ((5-\lambda)(4-\lambda) - 4)$$

$$= (3-\lambda) (\lambda^2 - 9\lambda + 16)$$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 3}}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 16} = \underline{\underline{\frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{145}}{2}}}$$

Satz

Die Eigenvektoren einer reellen
symmetrischen Matrix zu verschiedenen
Eigenwerten sind orthogonal

Beweis:

$$A \vec{x} = \alpha \vec{x}$$

$$A \vec{y} = \beta \vec{y} \quad \alpha \neq \beta$$

$$\sum_i y_i \mid \sum_j a_{ij} x_j = \alpha x_i \Rightarrow \sum_{i,j} a_{ij} y_i x_j = \alpha \sum_i x_i y_i$$

$$\sum_i x_i \mid \sum_j a_{ij} y_j = \beta y_i \Rightarrow \sum_{i,j} a_{ij} y_j x_i = \beta \sum_j x_j y_j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\alpha - \beta) \sum_i x_i y_i &= \sum_{i,j} a_{ij} (y_i x_j - x_i y_j) \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} (y_i x_j - x_j y_i) = 0 \\ &\text{da } a_{ij} = a_{ji} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_i x_i y_i = \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \square$$

Bspl:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = A \quad \text{symmetrisch!}$$

EW:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(-2-\lambda) - 5 = 0$$

$$\lambda^2 - 4 - 5 = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \pm 3$$

$$\lambda_+ \mid \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{+1} \\ x_{+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}_+?$

$$x_{+1} = \sqrt{5} x_{+2}$$

$$\vec{x}_+ = \alpha \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

α aus Normierung

$$\underline{\lambda_-} \quad \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{-1} \\ x_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sqrt{5} x_{-1} + x_{-2} = 0$$

$$\underline{\underline{\vec{x}_-}} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \beta \text{ aus Normierung}$$

hier $\vec{x}_- \cdot \vec{x}_+ = \alpha \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \alpha \beta (\sqrt{5} - \sqrt{5}) = \underline{\underline{0}} \quad \square$$

(E) orthogonale Matrizen

Def: Eine reelle quadratische Matrix heißt orthogonal wenn gilt

$$A^{-1} = A^T$$

d.h.

$$A^T A = A A^T = \mathbb{1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$A^T \qquad \qquad A$

analog

Spaltenvektoren sind orthogonal
Zilenvektoren sind orthogonal

Satz: Die Determinante einer orthogonalen, reellen Matrix ist ± 1

Bew: $A^T = A^{-1} \quad A^T A = \mathbb{I}$

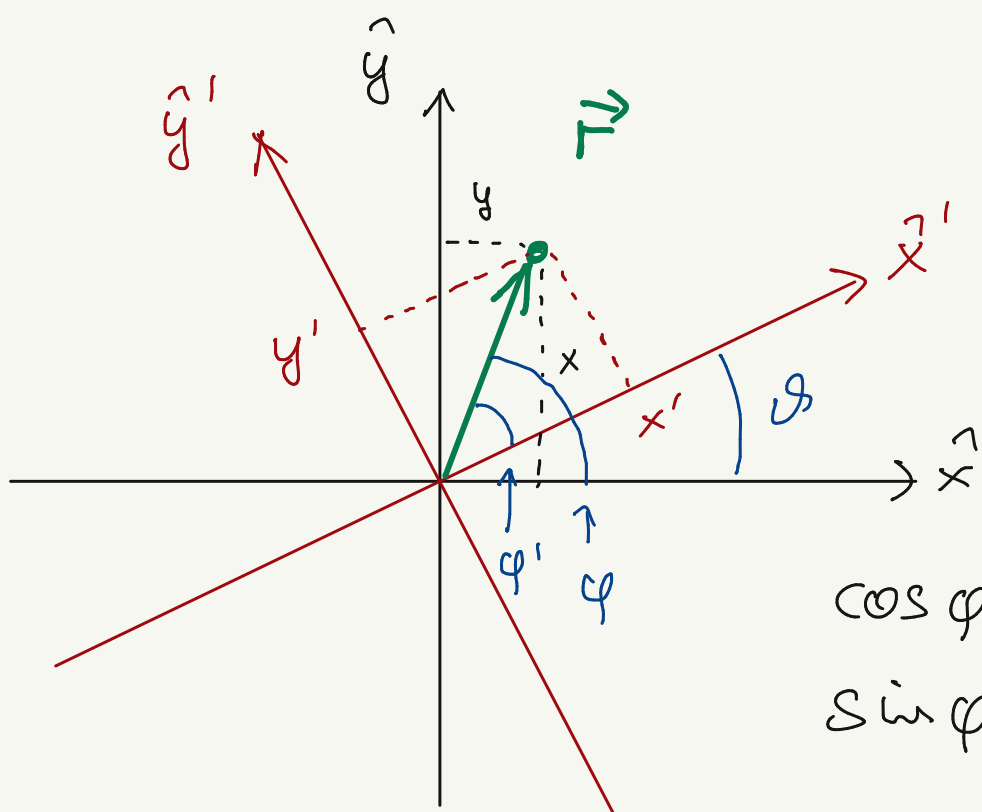
$$\begin{aligned} \det(A^T A) &= \det(A^T) \det(A) = 1 \\ &= (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1 \end{aligned}$$

VIII. 3 Drehungen und Drehmatrizen

In der Physik spielen Drehungen von Koordinatensystemen eine große Rolle. Diese lassen sich durch Matrizen in einer kompakten Form behandeln:

(A) Drehungen im $\mathbb{R}^2$

Der Einfachheit halber betrachten wir zuerst Drehungen in der Ebene



$$\varphi' = \varphi - \delta$$

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \varphi' \\ y' &= r \sin \varphi' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi' &= \cos(\varphi - \delta) = \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \\ \sin \varphi' &= \sin(\varphi - \delta) = \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x' = \underbrace{r \cos \varphi}_{=x} \cdot \cos \vartheta + \underbrace{r \sin \varphi}_{=y} \sin \vartheta$$

$$y' = -\underbrace{r \cos \varphi}_{=x} \sin \vartheta + \underbrace{r \sin \varphi}_{=y} \cos \vartheta$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{Matrixdarstellung der Drehung}$$

Def: Drehmatrix in $\mathbb{R}^2$ $D(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$

$$D^{-1}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} = D(-\vartheta)$$

$\Rightarrow$ inverse Drehung = Drehung um negativen Drehwinkel

► $D^{-1}(\vartheta) = D^T(\vartheta)$ orthogonale Matrix

► $\det(D) = \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = +1$

Drehmatrizen haben Determinante +1

► $D(\vartheta=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$ Einheitsmatrix

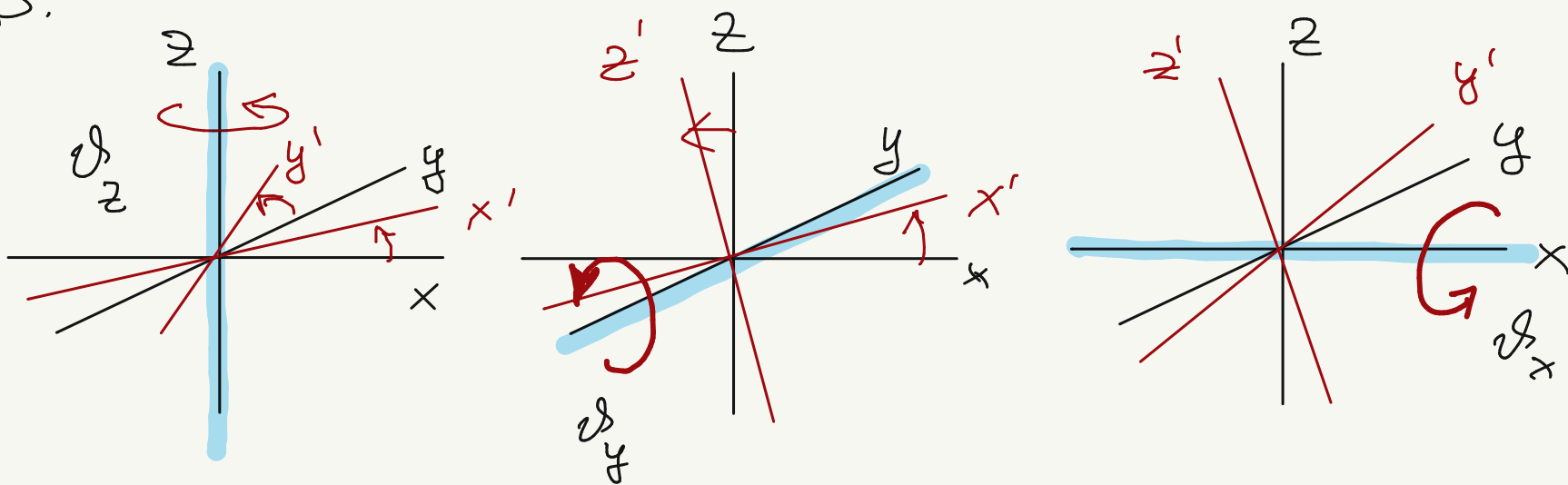
► Drehungen in $\mathbb{R}^2$ sind Abelsche Gruppe bzgl. Hintereinanderausführung

$$\begin{aligned}
 D(\vartheta_2) D(\vartheta_1) &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta_2 & \sin \vartheta_2 \\ -\sin \vartheta_2 & \cos \vartheta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 & \sin \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 - \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \\ -\cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 & \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 - \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ -\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{pmatrix} = D(\vartheta_2 + \vartheta_1)
 \end{aligned}$$

(B) Drehungen im $\mathbb{R}^3$

- Drehungen um verschiedene Achsen

z.B.



$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta_z & \sin \vartheta_z & 0 \\ -\sin \vartheta_z & \cos \vartheta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_z(\vartheta_z)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta_y & 0 & \sin \vartheta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta_y & 0 & \cos \vartheta_y \end{pmatrix}$$

$$D_y(\vartheta_y)$$

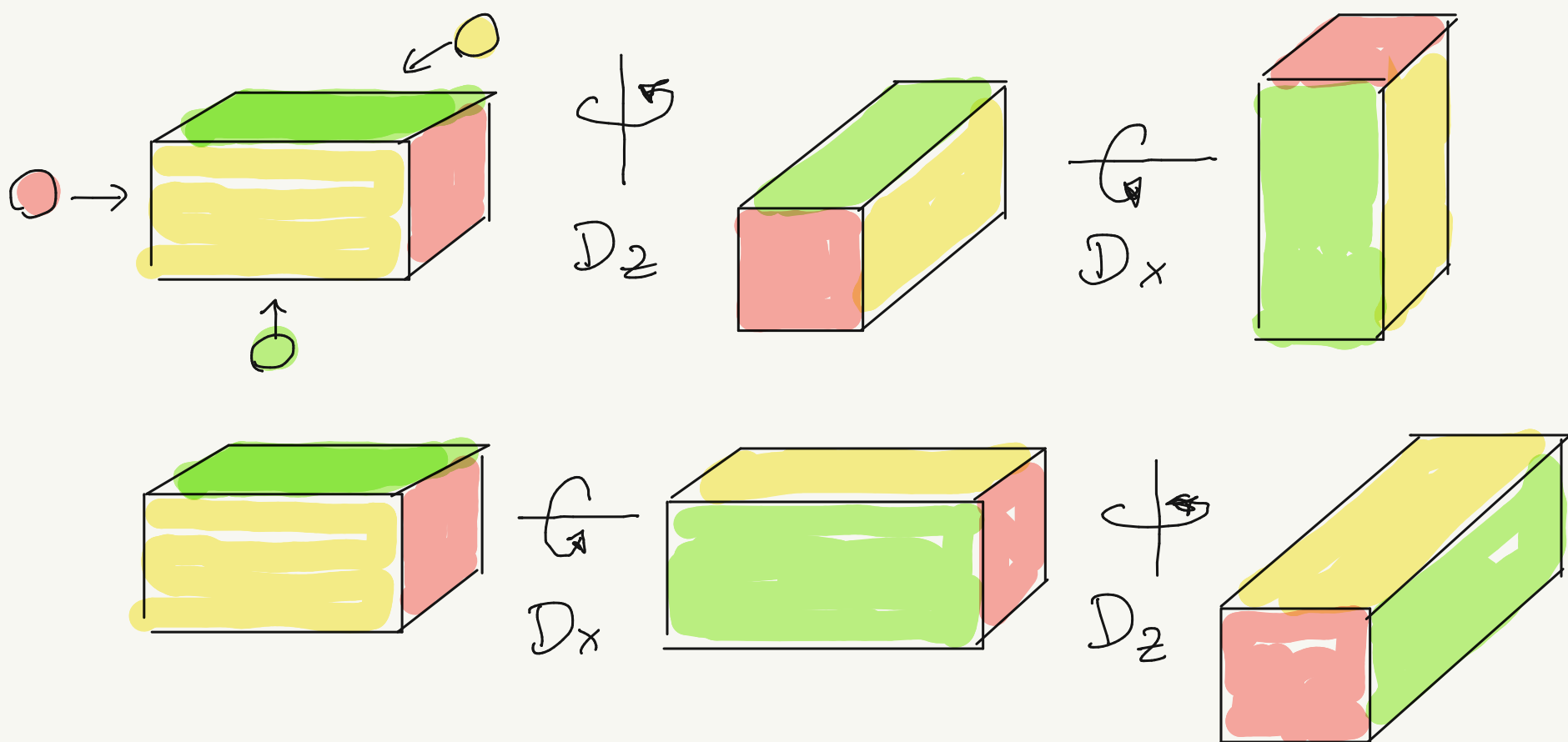
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta_x & \sin \vartheta_x \\ 0 & -\sin \vartheta_x & \cos \vartheta_x \end{pmatrix}$$

$$D_x(\vartheta_x)$$

allgemeine Drehung: Hintereinanderausführung

► i. A. nicht Abelsch (nicht kommutativ)

z.B. $D_z D_x \neq D_x D_z$



- Drehmatrizen reell, orthogonal

$$D^{-1} = D^T$$

-

$$\det(D) = +1$$

(C) Transformation von Matrizen

Wie wir gesehen haben transformiert sich der Koordinaten (spalten)vektor von $\vec{r}$ bei einer Drehung des Koordinatensystems wie

$$\vec{r} \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ein analoges Verhalten findet man für Matrizen (z.B. Trägheitstensor eines starren Körpers), was aus der Betrachtung von Beziehungen zwischen Vektoren klar wird.

Sei beispielsweise $\vec{F} \hat{=} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ eine allgemeine lineare Funktion von $\vec{r} \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$F_i = a_{ij} x_j$$

$$x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z$$

Rotation des Bezugssystems (Summenkonvention!)

$$F_i' = D_{ij} F_j \quad x_j' = D_{jk} x_k$$

$$F_i' = D_{ij} F_j = D_{ij} a_{jk} x_k = \underbrace{D_{ij} a_{jk} D_{ke}^{-1}}_{= a_{ie}'} x_e'$$

$\Rightarrow$

$$a_{ie}' = \sum_{j,k} D_{ij} a_{jk} D_{ke}^{-1}$$

in Matrixform

$$A' = D A D^{-1} = D A D^T$$

Eigenschaften: (i) $\det(A') = \det(DAD^T)$
 $= \det(D) \det(A) \det(D^T) = \det(A)$

(ii) Die EW von A' sind die selben wie von A

$$\det(A' - \lambda \mathbb{I}) = \det(DAD^{-1} - \lambda \mathbb{I})$$

$$= \det(D^{-1}(DAD^{-1} - \lambda \mathbb{I})D) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$$

□

→

VIII.4 Diagonalisierung symmetrischer Matrizen

Wir betrachten symmetrische reelle Matrizen $A = A^T$

$$A \vec{x}_\lambda = \lambda \vec{x}_\lambda$$

λ reell, $\vec{x}_\lambda$ zu verschiedenen λ orthogonal

Zur Vereinfachung: symmetrische Matrizen mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\Rightarrow$ EV bilden ONB
 (Verallgemeinerung möglich)

Satz: Eine $(n \times n)$ Matrix A , deren n EW paarweise verschieden sind lässt sich durch eine Matrixtransformation

$$A \rightarrow A_{\text{diag}} = Q^{-1} A Q$$

auf Diagonalform bringen

$$A_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i : \text{EW von } A$$

umgekehrt

$$A = Q A_{\text{diag}} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Die Matrix Q wird durch die n (orthogonalen) EV von A gebildet

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & \dots & | \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 & \dots & \vec{x}_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

Bew

$$\begin{aligned} AQ &= A \begin{pmatrix} | & | & | & \dots & | \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \\ | & | & & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & & | \\ \lambda_1 \vec{x}_1 & \lambda_2 \vec{x}_2 & \dots & \lambda_n \vec{x}_n \\ | & | & & & | \end{pmatrix} \\ &= Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = Q A_{\text{diag}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = Q A_{\text{diag}} Q^{-1} \quad \square$$

Folgerung Determinante = Produkt der EW

$$\det(A) = \det(Q A_{\text{diag}} Q^{-1})$$

$$= \det(Q^{-1} (Q A_{\text{diag}} Q^{-1}) Q)$$

$$= \det(A_{\text{diag}}) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

(A) Funktionen von Matrizen

A sei quadratische Matrix

$$A^2 = A \cdot A \quad \text{quadrat. Matrix}$$

- Funktion $f(A)$ definiert über Taylorreihe

$$\text{z.B. } e^A = 1 + A + \frac{1}{2} A^2 + \cdots + \frac{1}{n!} A^n + \cdots$$

- A symmetrisch $A = A^T$

$$A \vec{x}_\lambda = \lambda \vec{x}_\lambda \quad \text{Eigenwerte + Eigenvektoren}$$

$$f(A) \vec{x}_\lambda = f(\lambda) \vec{x}_\lambda$$

Wirkung von $f(A)$ auf beliebigen
Vektor $\vec{x} = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \vec{x}_{\lambda}$

$$f(A) \vec{x} = \sum_n f(\lambda) C_n \vec{x}_n$$

Vorsicht bei Rechenoperationen

$$e^A \cdot e^B \neq e^{A+B} \quad \text{falls } [A, B] \neq 0$$

i.A.

IX. Systeme linearer Differentialgleichungen

Eine Anwendung des Matrixkalküls ist die Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

IX.1 Allgemeines

- Newtons Gleichung für 1 dim. harmonischen Oszillator im Phasenraum

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{y} = A \vec{y} \Rightarrow \vec{y}(t) = \exp(A(t-t_0)) \vec{y}(t_0)$$

mit A.B $\vec{y}(t_0)$

Wie haben wir e^{At} zu verstehen? $\Rightarrow$ Taylorreihe