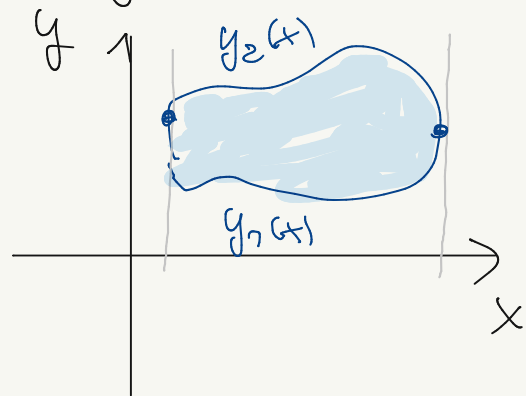
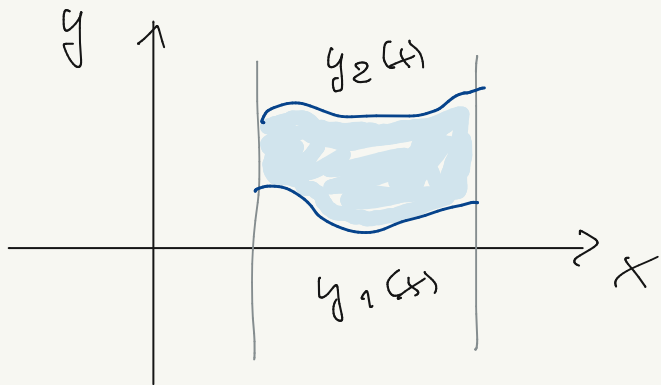


XI Vektoranalysis II

XI.1 Integrale über Vektorfelder II

(A) Flächen- und Volumenintegrale skalare Fkt.

- Fläche durch Randkurven $y_1(x)$, $y_2(x)$ begrenzt

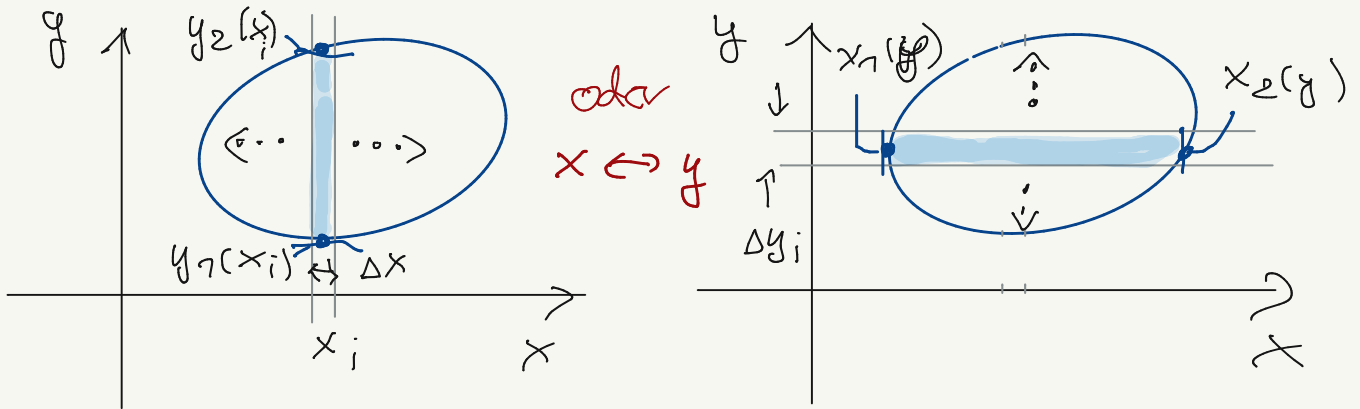


$$A = \{ (x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2 \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \}$$

Flächenintegral einer skalaren Funktion $f(x, y)$

$$\begin{aligned} I &= \iint_A dA f(x, y) = \iint_A dx dy f(x, y) \\ &\equiv \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x, y) \end{aligned}$$

Flächenelement $dA = dx dy = d^2r$



analog Volumenintegral einer skalaren Funktion $f(x, y, z)$

$$V = \{ (x, y, z) \mid x_1 \leq x \leq x_2 ; y_1(x) \leq y \leq y_2(x) ; z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \}$$

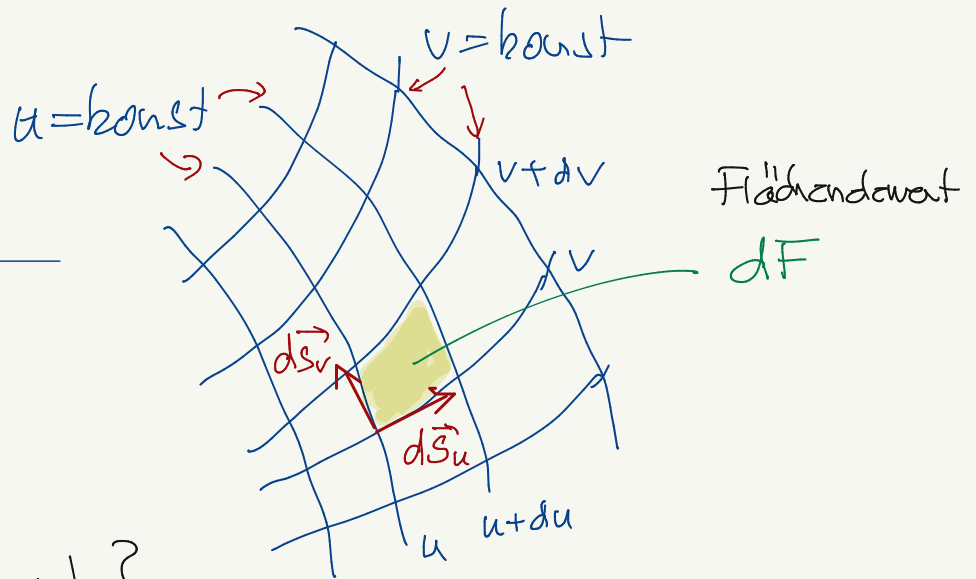
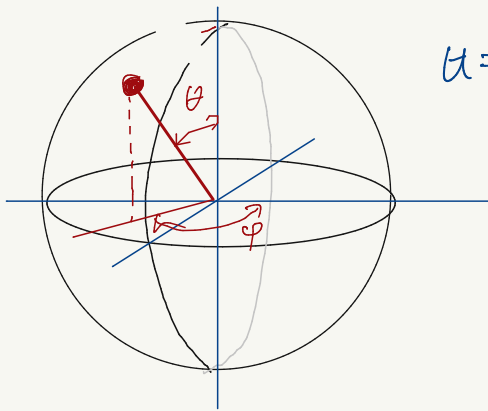
$$I = \iiint_V dV f(x, y, z) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Volumenelement $dV = dx dy dz = d^3r$

(B) Oberflächenintegrale vektorieller Funktionen

gebt vektorielle Funktion $\vec{F}(\vec{r})$ und Oberfläche $\mathcal{F}$

Oberfläche parametrisiert durch zwei Parameter u, v



$$\mathcal{A} = \{ \vec{r} = \vec{r}(u, v) \}$$

ebene Fläche

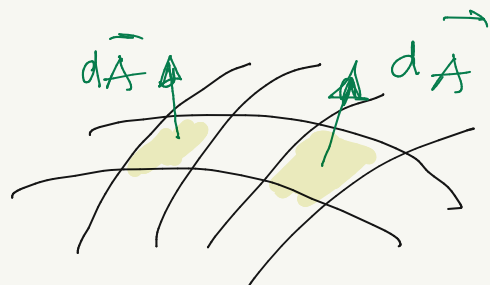
Oberfläche

$$\begin{aligned} dx dy & \left\{ \begin{aligned} d\vec{x} &= \hat{e}_x dx \\ d\vec{y} &= \hat{e}_y dy \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\vec{s}_u &= \vec{r}(u+du, v) - \vec{r}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \\ d\vec{s}_v &= \vec{r}(u, v+dv) - \vec{r}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv \end{aligned}$$

Flächenelement : gibt auch eine Richtung !

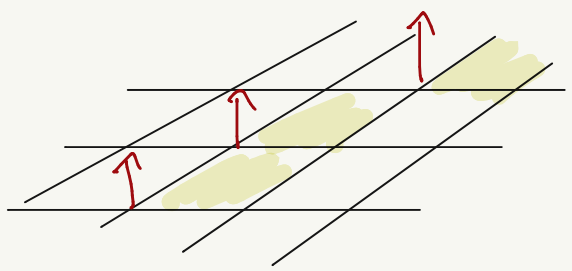
$$\begin{aligned} d\vec{A} &= d\vec{s}_u \times d\vec{s}_v \\ &= \vec{r}_u \times \vec{r}_v du dv \end{aligned}$$



$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$$

$$\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

in der Ebene ist das nicht wichtig:

$$\begin{aligned}
 d\vec{A} &= d\vec{s}_x \times d\vec{s}_y \\
 &= dx dy \vec{e}_x \times \vec{e}_y \\
 &= dx dy \vec{e}_z
 \end{aligned}$$


Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen

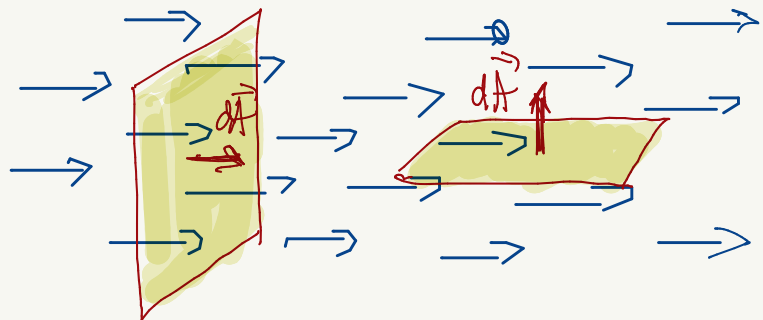
$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

$$d\vec{A} = \hat{n} dA \quad dA = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

Oberflächenintegral einer vektoriellen Funktion

$$I = \int_A d\vec{A} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_A dA \underbrace{\hat{n} \cdot \vec{F}(\vec{r})}_{\text{skalare Fubl.}}$$

Fluß des Feldes $\vec{F}$ durch infinitesimale Fläche $d\vec{A}$



$$d\Phi = d\vec{A} \cdot \vec{F}$$

$$d\Phi = \max \quad d\Phi = 0$$

Fluß durch Fläche A

$$\Phi = \int_A d\vec{A} \cdot \vec{F}$$

Eine besondere Bedeutung hat der Fluß durch eine geschlossene Oberfläche

$$\Phi = \oint_A d\vec{A} \cdot \vec{F} = \oiint_A d\vec{A} \cdot \vec{F}$$

Flächeninhalt der Oberfläche

setze $\vec{F}(\vec{r}) = \hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$

$$\int_A d\vec{A} \cdot \hat{n} = \iint_A du dv \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)^2}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2}$$

$$= \iint_A du dv |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = A$$

(C) Koordinatentransformationen in Integralen:

Jacobi Determinante

Wie transformiert man ein (Ober)flächen oder Volumenintegral zwischen verschiedenen krummlinigen Koordinaten?

► betrachten Flächenintegral in x,y Ebene

$$dA = d\vec{A} \cdot \vec{e}_z = \underbrace{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)}_{=J} \cdot \vec{e}_z \, du dv = dx dy$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =: \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Jacobi Determinante

Transformation zwischen Flächenelemente

$$dx dy = |J| du dv = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

Verallgemeinerung auf Transformation zwischen beliebigen (krümmungslinigen) ebenen Koordinaten

$$(U,V) \longleftrightarrow (u,v)$$

$$dU dV = \left| \frac{\partial(U,V)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

► Volumenintegral

$$(U, V, W) \longleftrightarrow (u, v, w)$$

$$dU dV dW = \left| \frac{\partial(U, V, W)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

Wobei die Jacobi-Determinante in 3D sich ergibt zu

$$\frac{\partial(U, V, W)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial W}{\partial u} \\ \frac{\partial U}{\partial v} & \frac{\partial V}{\partial v} & \frac{\partial W}{\partial v} \\ \frac{\partial U}{\partial w} & \frac{\partial V}{\partial w} & \frac{\partial W}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Bsp1: (i) $(x, y) \longleftrightarrow (r, \varphi)$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\int dx dy = \int dr d\varphi r$$

(ii) $(x, y, z) \longleftrightarrow (r, \vartheta, \varphi)$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi & \sin\vartheta \sin\varphi & \cos\vartheta \\ r \cos\vartheta \cos\varphi & r \cos\vartheta \sin\varphi & -r \sin\vartheta \\ -r \sin\vartheta \sin\varphi & r \sin\vartheta \cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \dots = r^2 \sin\vartheta$$

$$\int dx \int dy \int dz = \int dr \int d\vartheta \int d\varphi \, r^2 \sin\vartheta$$

XI.2 Integraldarstellung von Divergenz und Rotation

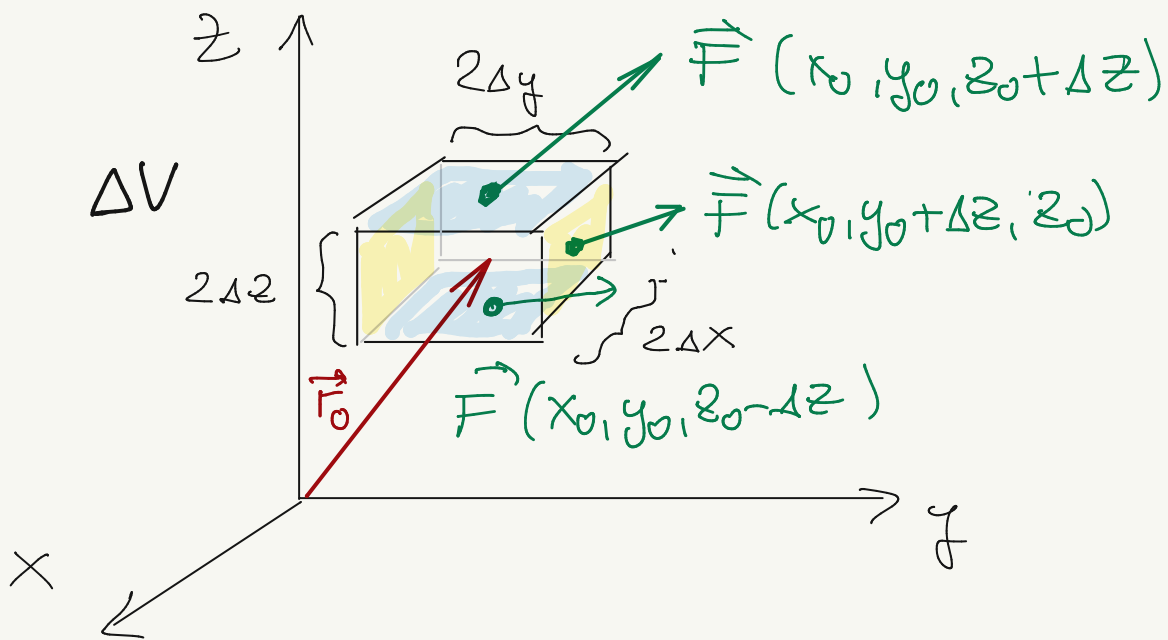
Betrachten $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

(A) Divergenz als Quellstärke

Wir zeigen

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}_0) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} d\vec{A} \cdot \vec{F}$$



$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial(\Delta V)} d\vec{A} \cdot \vec{F} &= \iint dy dz \left[A_x(x_0 + \Delta x, y, z) - A_x(x_0 - \Delta x, y, z) \right] \\
 &+ \iint dx dz \left[A_y(x, y_0 + \Delta y, z) - A_y(x, y_0 - \Delta y, z) \right] \\
 &+ \iint dx dy \left[A_z(x, y, z_0 + \Delta z) - A_z(x, y, z_0 - \Delta z) \right] \\
 &\quad \Delta z \rightarrow 0 \quad 2\Delta z \quad \frac{\partial A_z}{\partial z}(x, y, z_0)
 \end{aligned}$$

etr.

Mittelwertsatz der Integralrechnung

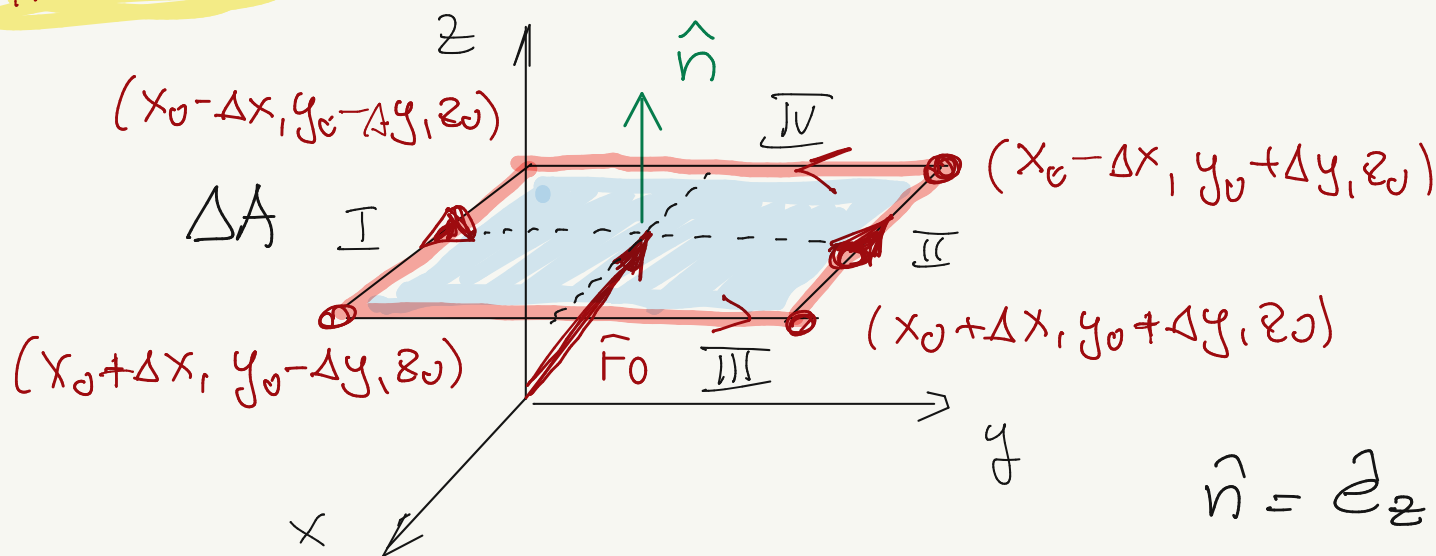
$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta V} \iint dx dy [\dots] &= \frac{\partial A_z}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \frac{2\Delta z}{8\Delta x \Delta y \Delta z} \underbrace{\iint dx dy}_{4\Delta x \Delta y} \\
 &= \frac{\partial A_z}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \quad \square \\
 &\quad + \text{andere Seiten}
 \end{aligned}$$

(B) Rotation als Wirbelstärke

Wir zeigen

$$\hat{n} \cdot \text{rot } \vec{F} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_{\partial(\Delta A)} d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

11.01.2021 →



$$\begin{aligned} \oint d\vec{r} \cdot \vec{F} &= \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0 + \Delta x} dx \left[\underbrace{F_x(x, y_0 - \Delta y, z_0)}_{\text{I}} - \underbrace{F_x(x, y_0 + \Delta y, z_0)}_{\text{II}} \right] \\ &\quad + \int_{y_0 - \Delta y}^{y_0 + \Delta y} dy \left[\underbrace{F_y(x_0 + \Delta x, y, z_0)}_{\text{III}} - \underbrace{F_y(x_0 - \Delta x, y, z_0)}_{\text{IV}} \right] \end{aligned}$$

$$\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$$

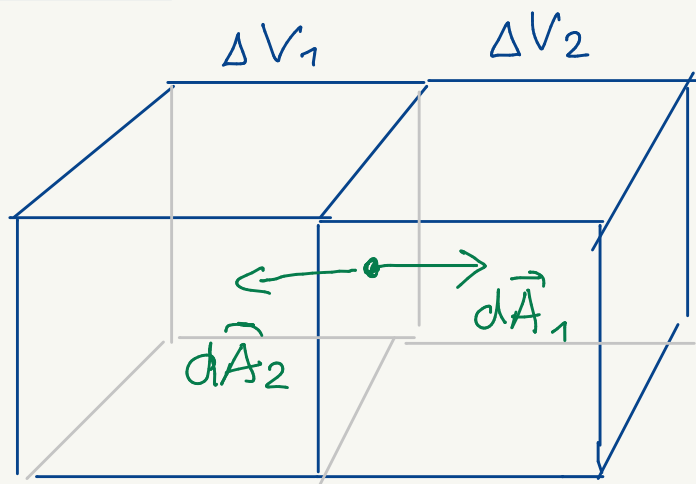
$$\begin{aligned} &= - \frac{\partial F_x(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} 2\Delta y 2\Delta x \\ &\quad + \frac{\partial F_y(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} 2\Delta x 2\Delta y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint_{\partial(\Delta x, \Delta y)} d\vec{A} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = (\text{rot } \vec{F})_z \quad \square$$

XI. 3 Integralsätze von Gauß und Stokes

- betrachten zwei zusammenge-setzte Volumenelemente

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$



$$\oiint_{(\Delta V)} d\vec{A} \cdot \vec{F} = \oiint_{\Delta V_1} d\vec{A} \cdot \vec{F} + \oiint_{\Delta V_2} d\vec{A} \cdot \vec{F}$$

Die Beiträge an der Grenzfläche zwischen ΔV_1 und ΔV_2 heben sich heraus

da

$$d\vec{A}_1 = -d\vec{A}_2$$

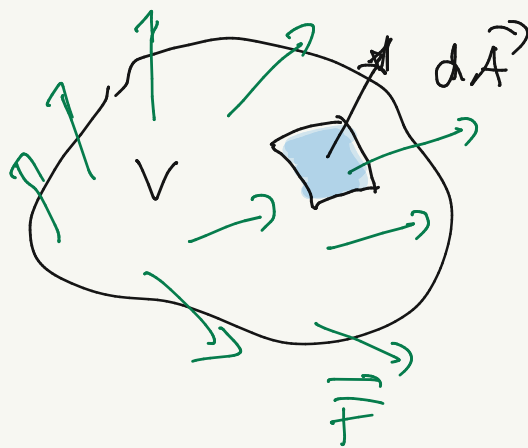
$\Rightarrow$

$$\oiint_{\partial(V)} d\vec{A} \cdot \vec{F} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta V_i \cdot \frac{1}{\Delta V_i} \oiint_{\partial(\Delta V_i)} d\vec{A} \cdot \vec{F}$$

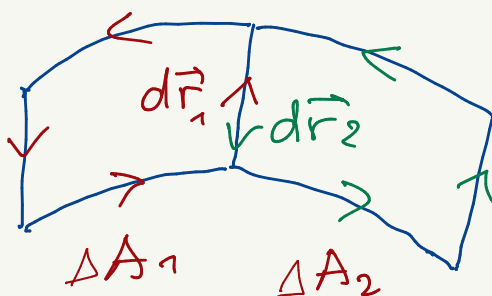
$$= \iiint_V dV \, d\vec{w} \, \vec{F}$$

$$\oiint_{\partial(V)} d\vec{A} \cdot \vec{F} = \iiint_V dV \, d\vec{w} \, \vec{F}$$

Satz von Gauß



- Betrachten zwei zusammenhängender Flächenelemente



$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2$$

$$\oint_{(\Delta A_1)} d\vec{A} \cdot \vec{F} + \oint_{(\Delta A_2)} d\vec{A} \cdot \vec{F} = \oint_{(\Delta A)} d\vec{A} \cdot \vec{F}$$

Die Beiträge von der Integration entlang der gemeinsamen Verbindungslinie heben sich gegenseitig auf, da

$$d\vec{r}_1 = -d\vec{r}_2$$

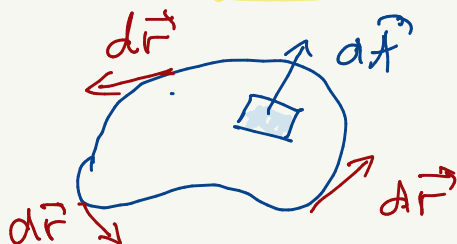
$\Rightarrow$

$$\oint_{\mathcal{O}(A)} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \oint_{\mathcal{O}(\Delta A_i)} d\vec{r} \cdot \vec{F} \frac{\Delta A_i}{\Delta A_i}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta A_i \operatorname{rot} \vec{F} = \iint_A d\vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{F}$$

$$\oint_{\mathcal{O}(A)} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \iint_A d\vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{F}$$

Satz von Stokes

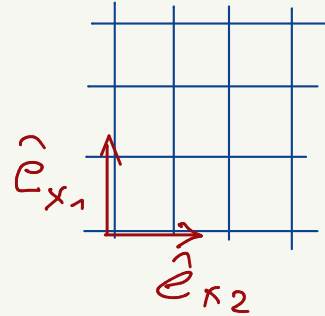


XI.4 Vektoranalysis in krummlinigen Koordinaten

Zur Erinnerung:

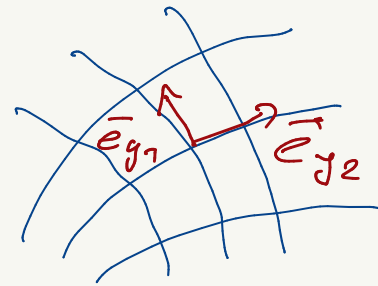
- kartesische Koordinaten

$$\vec{r} \hat{=} (x_1, x_2, x_3)$$



- krummlinige (lokale) orthogonale Koordinaten

$$\vec{r} \hat{=} (y_1, y_2, y_3)$$



Einheitsvektoren

$$\hat{e}_{y_i} = \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}$$

$$b_{y_i} \equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \right|$$

(A) Gradient

$$f(\vec{r})$$

$$df(\vec{r}) = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

in krummlinigen Koordinaten

$$df = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j$$

$$\vec{\nabla} f = \sum_j (\vec{\nabla} f)_{y_j} \hat{e}_{y_j}$$

$$d\vec{r} = \sum_k b_k dy_k \hat{e}_{y_k}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \sum_j (\vec{\nabla} f)_{y_j} b_j dy_j$$

auf der anderen Seite

$$\vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{\nabla} f)_{y_j} = \frac{1}{b_j} \frac{\partial f}{\partial y_j}}$$

komponenten
des Gradienten
in (y_1, y_2, y_3)

Damit erhält man für die Darstellung des Nabla Operators in krummlinigen Koordinaten:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \sum_j \vec{e}_j \frac{1}{b_j} \frac{\partial}{\partial y_j}}$$

wobei $\vec{e}_j \equiv \vec{e}_{y_j}$

• Besonderheit:

Sowohl b_j als auch $\vec{e}_j$
hängen von den y_i ab !

Das ist bei kartesischen
Koordinaten nicht der Fall

(B) Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{k,j} \left(\vec{e}_k \frac{1}{b_k} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \cdot (A_j \vec{e}_j)$$

$$(*) = \sum_{k,j} \left(\frac{1}{b_k} \frac{\partial A_j}{\partial y_k} \underbrace{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{kj}} + \frac{1}{b_k} A_j \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial y_k} \right)$$

neuer Term in
krümmungigen Koord.

Was ist $\vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial y_k} = ?$

• $\boxed{j=k}$ $\vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial y_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_k} (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_k) = 0$

• $\boxed{j \neq k}$ $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y_j \partial y_k} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y_k \partial y_j}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_j} (b_k \vec{e}_k) = \frac{\partial}{\partial y_k} (b_j \vec{e}_j)$$

$$\vec{e}_k \left| \quad b_k \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial y_j} + \frac{\partial b_k}{\partial y_j} \vec{e}_k = b_j \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial y_k} + \frac{\partial b_j}{\partial y_k} \vec{e}_j \right.$$

$$\underbrace{b_k \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial y_j}}_{=0 \text{ s.o.}} + \frac{\partial b_k}{\partial y_j} = b_j \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial y_k}$$

$$\Rightarrow b_j \hat{e}_k \frac{\partial \hat{e}_j}{\partial y_k} = \frac{\partial b_k}{\partial y_j}$$

Einsetzen in (*)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \sum_j \left[\frac{1}{b_j} \frac{\partial A_j}{\partial y_j} + \sum_{k \neq j} \frac{A_j}{b_k b_j} \frac{\partial b_k}{\partial y_j} \right] \\ &= \frac{1}{b_1} \left[\frac{\partial A_1}{\partial y_1} + \frac{A_1}{b_2} \frac{\partial b_2}{\partial y_1} + \frac{A_1}{b_3} \frac{\partial b_3}{\partial y_1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{b_2} \left[\frac{\partial A_2}{\partial y_2} + \dots \right] + \frac{1}{b_3} \left[\frac{\partial A_3}{\partial y_3} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (A_1 b_2 b_3) + \frac{\partial}{\partial y_2} (A_2 b_1 b_3) + \frac{\partial}{\partial y_3} (A_3 b_1 b_2) \right]$$

Divergenz in krummlinigen Koordinaten

(C) Rotation

Analog zu den Rechnungen oben lässt sich zeigen

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \sum_{k,j} \left(\frac{1}{b_k} \frac{\partial}{\partial y_k} \vec{e}_k \right) \times (A_j \vec{e}_j)$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \begin{vmatrix} b_1 \vec{e}_1 & b_2 \vec{e}_2 & b_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ b_1 A_1 & b_2 A_2 & b_3 A_3 \end{vmatrix}$$

Potential in krummlinigen Koordinaten

(D) Laplace Operator

Für den Laplace Operator

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \sum_{i,k} \left(\frac{1}{b_k} \frac{\partial}{\partial y_k} \vec{e}_k \right) \left(\frac{1}{b_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \vec{e}_i \right)$$

findet man:

$$\Delta = \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{b_2 b_3}{b_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{b_1 b_3}{b_2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{b_1 b_2}{b_3} \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \right]$$