

charakteristische Gleichung

$$(\Omega^2 - \omega^2 \mathbb{1}) \vec{z} = (\Omega^2 - \omega^2 \mathbb{1}) \vec{a} e^{i\omega t} = 0$$

$\Rightarrow$ EV Gleichung:

$$(\Omega^2 - \omega^2 \mathbb{1}) \vec{a} = 0$$

$\omega \rightarrow$ Eigenwerte von Ω^2

$\vec{a} \rightarrow$ Eigenvektoren von Ω^2

X. Inertialsysteme und Nichtinertialsysteme

X.1 Inertialsysteme und Galileitransformation

Lex prima: $\exists$ ein Inertialsystem

Lex secunda: in einem Inertialsystem: $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$
($m = \text{konst}_t$)

► Transformation zwischen Inertialsystemen?

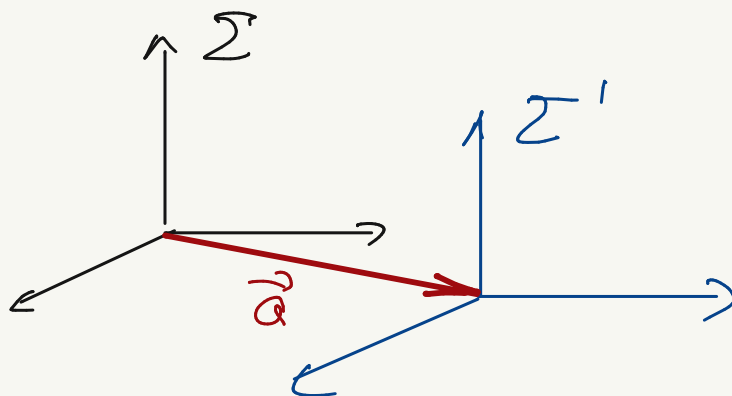
$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow \vec{r}' = R \vec{r} + \vec{u} t + \vec{a} \\ t &\rightarrow t' = \lambda t + t_0 \end{aligned}$$

R orthogonale
Matrix in $\mathbb{R}^3$
 $R, \vec{u}, \vec{a}$ konstant t

$$R \in O(3) \quad \det(R) = \pm 1 \quad \lambda = \pm 1$$

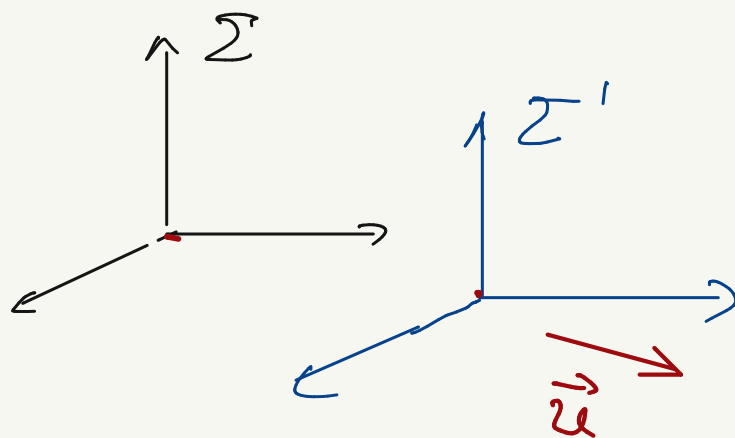
(i) Verschiebung des Koordinatenursprungs

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$$



(ii) gleichförmige Relativbewegung mit $\vec{u}$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u} t$$



(iii) zeitlich konstante (!) Drehung im Raum ($\det R = 1$)
oder Drehung plus Raumspiegelung ($\det R = -1$)

$$\vec{r}' = R \vec{r} \quad R \text{ reell}$$

$$(\vec{r}')^2 \stackrel{!}{=} (\vec{r})^2 \quad \text{Länge erhalten}$$

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j \quad \sum_{i=1}^3 (x'_i)^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{e=1}^3 R_{ik} R_{ie} x_k x_e$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^3 (x_k)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^3 R_{ik} R_{ie} = \delta_{ke} \quad \text{d.h.} \quad R R^T = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow R^{-1} = R^T \quad \text{reelle orthogonale Matrix}$$

$$\Rightarrow \det(R) = \pm 1$$

(iv) Verschiebung des Zeitnullpunktes und ggf. Zeitumkehr

$$t' = \pm t + t_0$$

hier:

$$\det R = +1 \quad \lambda = +1$$

10 kontinuierliche Parameter

$$R: 3$$

$$\vec{u}: 3$$

$$\vec{a}: 3$$

$$t_0: 1$$

eigentliche orthochrone Galileitransformation

(*)

$$\vec{F} \rightarrow \vec{F}' = R \vec{F} + \vec{u} t + \vec{a}$$

$$t \rightarrow t' = t + t_0$$

$$R \in SO(3)$$

$$\det(R) = 1$$

ist eine Gruppe; d.h. Hintereinanderausführung
ist wieder eine Galileitransfo

In allen Inertialsystemen haben die Newtonschen Bewegungsgleichungen dieselbe Form, wobei auch die Kraft $\vec{F}$ gemäß (*) transformiert werden muß

$$\vec{F}(\vec{F}, \dot{\vec{F}}, t) \rightarrow \vec{F}'(\vec{F}', \dot{\vec{F}}', t') = R \vec{F}(\vec{F}', \dot{\vec{F}}', t')$$

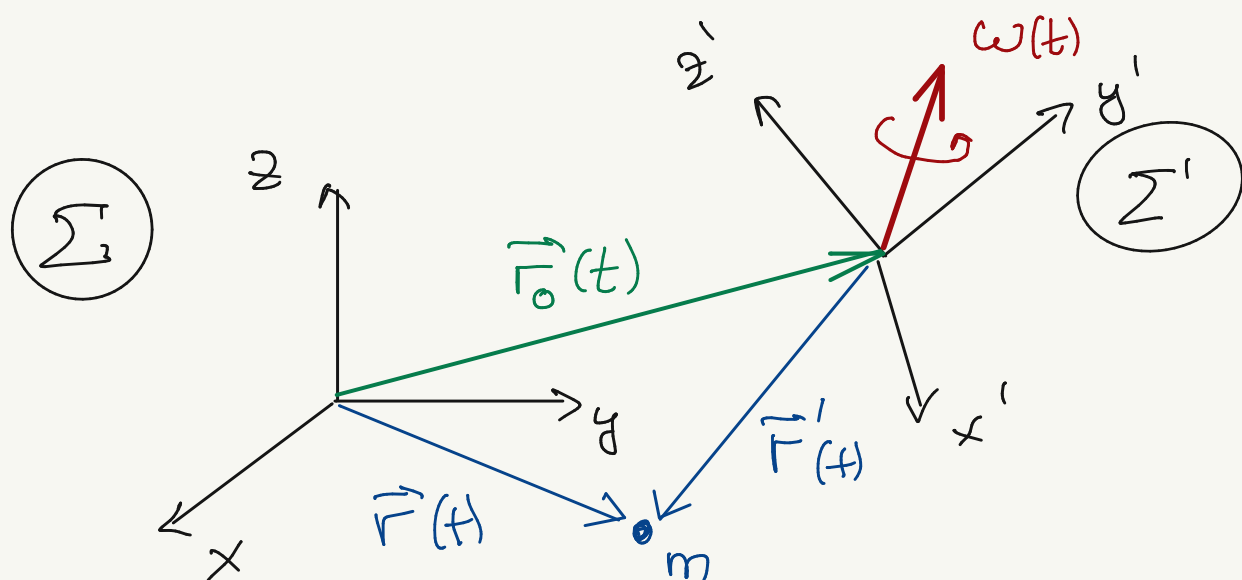
Galileisches Relativitätsprinzip

X.2 Rotierende Bezugssysteme

Inertialsysteme $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

nicht-Inertialsystem $m \ddot{\vec{r}} \neq \vec{F}$

Betrachten zwei relativ zueinander bewegt, i. d. beschleunigte Bezugssysteme mit kartesischen Koordinaten



zu jedem Zeitpunkt als Kombination von Verschiebung $\vec{r}_0(t)$ und Rotation $\vec{\omega}(t)$ darstellbar

Ortvektor

in Σ

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \vec{e}_i = \vec{r}_0(t) + \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \vec{e}'_i(t)$$

in Σ'

$$\vec{r}'(t) = \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \vec{e}'_i = -\vec{r}_0(t) + \sum_{i=1}^3 x_i(t) \vec{e}_i(t)$$

• aus Σ betrachtet

$\vec{e}_i$

zeitunabhängig

$\vec{e}'_i = \vec{e}'_i(t)$

zeitabhängig

• aus Σ' betrachtet

$\vec{e}_i$

zeitabhängig

$\vec{e}_i = \vec{e}_i(t)$

zeitabhängig

Geschwindigkeit

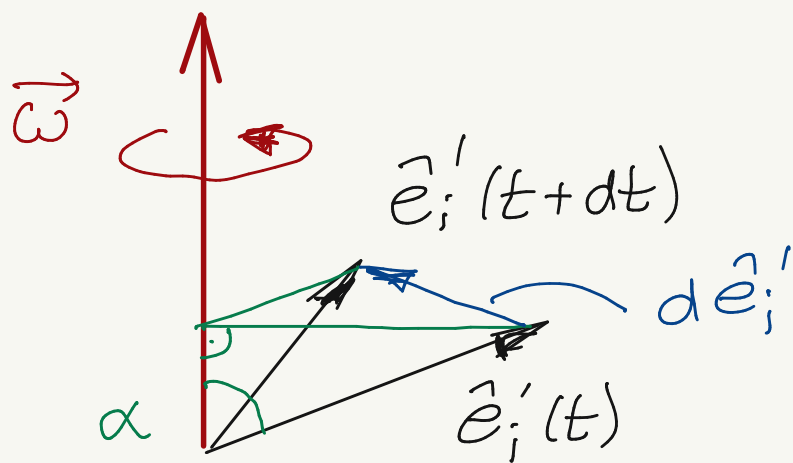
$$\text{in } \Sigma \quad \vec{r}^{\circ}|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) \vec{e}_i$$

$$\text{in } \Sigma' \quad \vec{r}^{\circ'}|_{\Sigma'} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i'(t) \vec{e}_i'$$

Zusammenhang

$$\begin{aligned} \vec{r}^{\circ}|_{\Sigma} &= \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_0(t) + \sum_{i=1}^3 x_i'(t) \vec{e}_i'(t) \right)_{\Sigma} \\ &= \dot{\vec{r}}_0(t) + \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i'(t) \vec{e}_i'(t) + \sum_{i=1}^3 x_i'(t) \frac{d}{dt} \vec{e}_i'(t) \\ &= \dot{\vec{r}}_0(t) + \dot{\vec{r}}'(t)|_{\Sigma'} + \sum_{i=1}^3 x_i'(t) \frac{d}{dt} \vec{e}_i'(t) \end{aligned}$$

Was ist $\frac{d}{dt} \vec{e}_i'(t)$?



$$\begin{aligned} |d\vec{e}_i'| &= \sin \alpha \, \omega \, dt \\ &= |\vec{\omega} \times \vec{e}_i'| \, dt \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$d\vec{e}_i' = (\vec{\omega} \times \vec{e}_i') \, dt$$

Damit ergibt sich

$$\vec{r}^{\circ}|_{\Sigma} = \underbrace{\dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}'|_{\Sigma'}}_{\dot{\vec{r}}|_{\Sigma'}} + (\vec{\omega} \times \vec{r}')_{\Sigma'}$$

bzw

$$\frac{d}{dt}(\quad)_{\Sigma} = \frac{d}{dt}(\quad)_{\Sigma'} + (\vec{\omega} \times \quad)_{\Sigma'}$$

Zweimalige Anwendung liefert

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}|_{\Sigma} &= \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}'|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')_{\Sigma'} \\ &\quad + 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')_{\Sigma'} + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}')_{\Sigma'} \end{aligned}$$

Wenn sei Σ ein Inertialsystem $\Rightarrow$

$$m \ddot{\vec{r}}|_{\Sigma} = \vec{F}(\vec{r})$$

dann gilt in Σ' , das i.A. kein Inertialsystem ist

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}}' &= \vec{F}(\vec{r}' - \vec{r}_0) - m \ddot{\vec{r}}_0 \\ &\quad - m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')) - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}') \end{aligned}$$

Schein- oder Trägheitskräfte

Newton'sches Gesetz in Nichtinertialsystem

$$\vec{F}_C = -2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')$$

Coriolis Kraft

$$\vec{F}_Z = -m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'))$$

Zentrifugalkraft

$\rightarrow$ Anwendungen: ExPhys Vorlesung; ÜA.