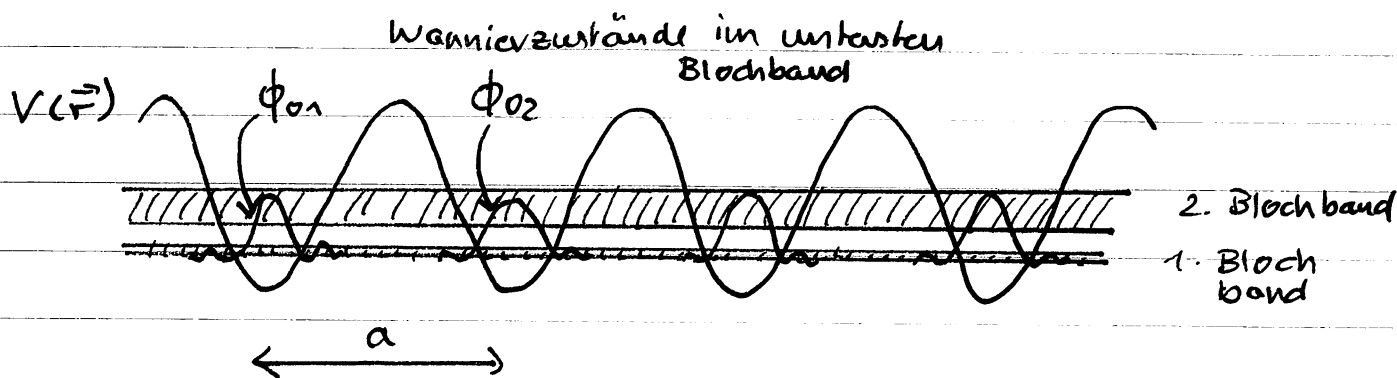


8. Bose Kondensate in periodischen Potentialen im Grenzfall starker Bindung: Bose-Hubbard Modell

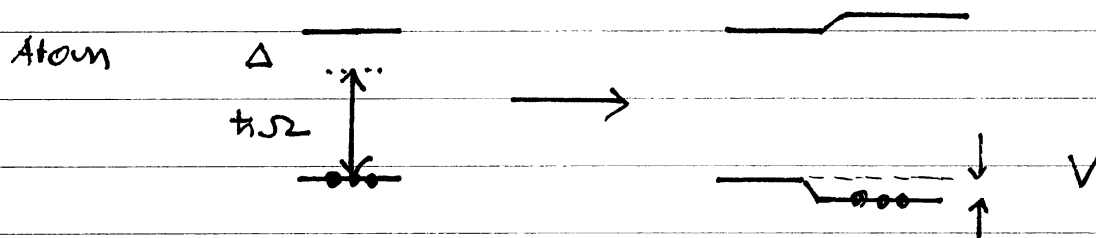
In den letzten Jahren hat das Interesse an ultrakalten Quantengasen in eingeschränkten räumlichen Dimensionen für das Studium von Vielteilchenwechselwirkungen rapid zugenommen. Wie wir in Kapitel 5A gesehen haben, nimmt die Bedeutung der Wechselwirkung bei räumlich eingeschränkten Systemen gegenüber kinetischer und potentieller Energie zu. Damit ist es möglich in Systemen mit reduzierter räumlicher Freiheit in ein Regime starker Wechselwirkung vorzudringen in dem Vielteilcheneffekte eine große Rolle spielen. Diese sind i.A. nicht mit einer Bogoliubov Störungstheorie behandelbar. Ein wichtiges solches System sind ultrakalte Bosonen in tiefen periodischen Gitterpotentialen.



Für neutrale Atome kann ein Potential z.B. durch Laserfelder erzeugt werden die nicht resonant den einen (oder mehrere) Dipolübergänge im Atom koppeln.

$$(1) \quad V(\vec{r}) \approx \frac{\hbar |\Omega(\vec{r})|^2}{\Delta_{\text{eff}}}$$

wobei $\Omega(\vec{r}) = \vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{r}) / \hbar$ die Rabi-Frequenz des Laserfeldes $\vec{E}$ bzgl. eines Übergangs mit Dipolmoment $\vec{d}$ bedeutet, Δ_{eff} ist die effektive Verstimmung $\Delta_{\text{eff}} \approx \omega_{\text{laser}} - \omega_{\text{Atom}}$



Durch Überlagerung und Interferenz mehrerer Laserfelder können periodische Potentiale erzeugt werden. Im isochanen Fall hat man

$$(2) \quad V(\vec{r}) = \sum_{j=1}^3 V_j \sin^2(q x_j) \quad q = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (x_1, x_2, x_3) = \vec{r}$$

wobei $V_j = \frac{\hbar |\Omega_j|^2}{\Delta_{\text{eff}}}$. Dabei Einteilchenhamilton-

operator (d.h. ohne Wechselwirkung) mit dem Translation-

$$(3) \quad T_{\vec{a}_\mu} = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a}_\mu \cdot \vec{p}} \quad T_{\vec{a}_\mu} \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{a}_\mu)$$

kommutiert, wobei die $\vec{a}_\mu$ die Gittervektoren $\vec{a}_\mu = \frac{\lambda}{2} \vec{e}_\mu$ bedeuten, sind die Eigenfunktionen von H auch solche von $T_{\vec{a}_\mu}$, d.h. ihre Amplitude ist $\vec{a}_\mu$ -periodisch

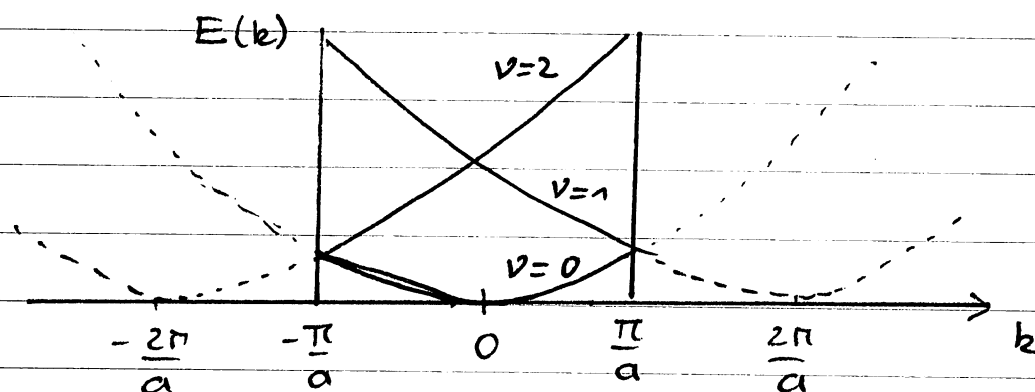
$$(4) \quad \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$(5) \quad u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{a}_\mu) = u_{\vec{k}}(\vec{r})$$

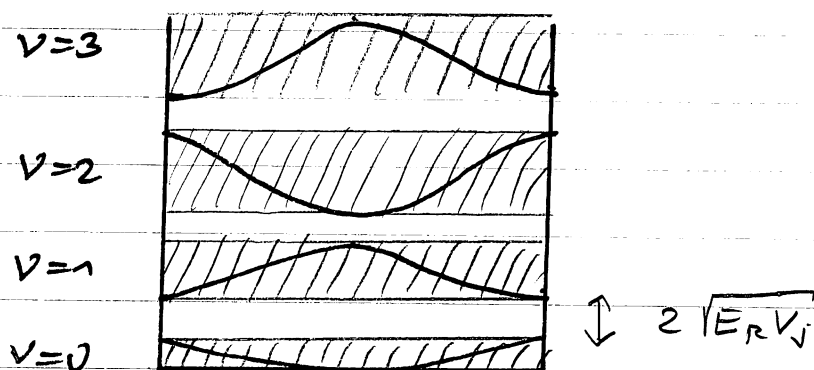
Wegen der Periodizität (5) ist es hinreichend $\vec{k}$ nur über die erste Brillouinzone laufen zu lassen, d.h.

$$(6) \quad k_\mu \in \left\{ -\frac{\pi}{a_\mu}, \frac{\pi}{a_\mu} \right\} \quad \mu=1,2,3$$

Für $V_j \rightarrow 0$ erhält man das Energiediagramm das in



verschiedene Blochbänder $v=0,1,2,\dots$ eingeführt wird. Das Potential der Stärke V_j führt zu einer Kopplung der Blochbänder, so daß die Kreuzungspunkte zu vermeidenden Kreuzungen werden:



Es entstehen erlaubte Energiebänder (Blochbänder) und Energielücken. In einer Dimension hat man

$$(7) \quad H \psi_{kv}(x) = E_v(k) \psi_{kv}(x)$$

$$(8) \quad E_V(k + \frac{2\pi}{a}) = E_V(k)$$

Die Bandlücke zwischen 0ten und 1ten Blochband ist dabei $2\sqrt{E_R V_0}$ wobei $E_R = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$ die sog. recoil-Energie des Stehwellenfeldes bedeutet.

Nun wollen wir ultrakalte Gase mit $k_B T \ll 2\sqrt{E_R V_0}$ betrachten. Dann ist es hinreichend sich auf das unterste Blochband zu beschränken. Darüberhinaus geht man von den Blochfunktionen $u_{k0}(x)$ zu den sog. Wannier-funktionen $\varphi_{\ell 0}(x)$ über ($\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$(9) \rightarrow (8) \quad \varphi_{\ell 0}(x) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk e^{-ik\ell a} \underbrace{u_{k0}(x) e^{ikx}}_{\varphi_{k0}(x)} = \varphi_0(x - x_\ell) \quad x_\ell = \ell a$$

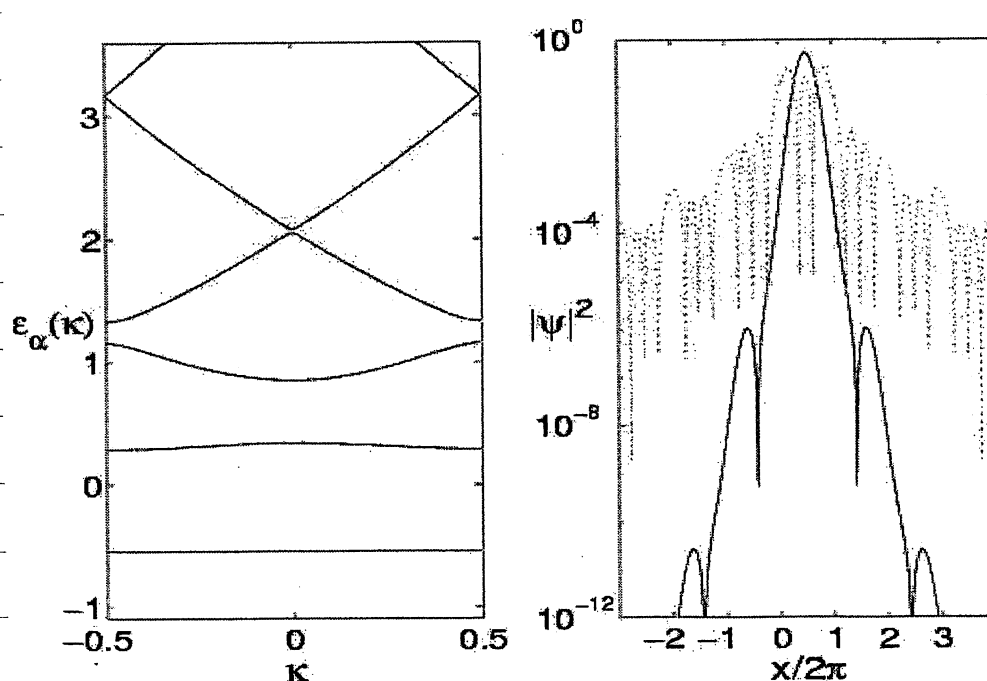


Figure 1.2. Left panel - lowest energy bands $\epsilon_\alpha(k)$ for the potential $V(x) = \cos(x)$ with parameters $\hbar = 1$ and $m = 1$. Right panel - associated Wannier states $\psi_{0,0}$ (solid line) and $\psi_{1,0}$ (dotted line).

Die Wannierfunktionen des untersten Blochbandes sind stark an den Minima x_e des periodischen Potentials lokalisiert und können reell gewählt werden.

(A) Der Bose-Hubbard Hamiltonian

Beschränkt man sich auf das unterste Blochband kann man den Feldoperator der Bosonen in der Form

$$(9) \quad \hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_e \hat{b}_e \phi_0(\vec{r} - \vec{r}_e)$$

ansetzen wobei die $\hat{b}_e, \hat{b}_e^\dagger$ Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren von Bosonen im Potentialtopf $\vec{r}_e$ bedeuten (genauer in dem zugehörigen Wannierzustand). Es gilt $[\hat{b}_e, \hat{b}_{e'}^\dagger] = \delta_{ee'}$, denn

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = \sum_{ee'} [\hat{b}_e, \hat{b}_{e'}^\dagger] \phi_0(\vec{r} - \vec{r}_e) \cdot \phi_0(\vec{r}' - \vec{r}_{e'})$$

(10)

$$= \sum_e \phi_0(\vec{r} - \vec{r}_e) \phi_0(\vec{r}' - \vec{r}_e)$$

$$\approx \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Einsetzen von (9) in den Hamiltonoperator in 2. Quantisierung

$$(11) \quad H = \int d^3\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) + V_{\text{trap}}(\vec{r}) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}) + \frac{g}{2} \int d^3\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r})$$

wobei $V_{\text{trap}}(\vec{r})$ ein auf der Skala von $V(\vec{r})$ langsam veränderliches zusätzliches Fallenpotential bedeutet, liefert

$$(12) \quad H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + \sum_i \varepsilon_i \hat{n}_i + \frac{U}{2} \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1)$$

Hierbei bedeutet $\langle ij \rangle$ Summation über nächste Nachbarn.

$$(13) \quad J = \int d^3\vec{r} \phi_0(\vec{r} - \vec{r}_i) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right) \phi_0(\vec{r} - \vec{r}_j)$$

mit $\vec{r}_i$ und $\vec{r}_j$ benachbarten Gitterpunkten. Wenn $\vec{r}_i$ und $\vec{r}_j$ nicht zu benachbarten Gitterplätzen gehören, ist das entsprechende Integral (13) vernachlässigbar klein. ε_i ist die mittlere potentielle Energie durch das äußere, langsam veränderliche Fallenpotential am Ort $\vec{r}_i$:

$$(14) \quad \varepsilon_i = \int d^3\vec{r} \phi_0(\vec{r} - \vec{r}_i) V(\vec{r}) \phi_0(\vec{r} - \vec{r}_i) \approx V(\vec{r}_i)$$

U ergibt sich zu

$$(15) \quad U = g \int d^3\vec{r} \phi_0(\vec{r})^4 \quad g = \frac{4\pi \hbar^2 a_s}{m}$$

Abgesehen von dem Term ε_i ist (12) der sog. Bose-Hubbard Hamiltonian. Der sog. hopping Parameter J beschreibt den endlichen Überlapp benachbarter Wannierzustände und damit die Tunnelrate zwischen benachbarten Minima, U charakterisiert die Abstoßung von Atomen in derselben Potentialmulde aufgrund der Stoß-

Wechselwirkung. Um einen Einblick in die Größenordnung der Parameter zu bekommen approximieren wir die Wannierfunktionen durch Gaußfunktionen die dem Grundzustand der einzelnen Fallentöpfe in harmonischer Näherung entsprechen

$$(16) \quad V_j \sin^2(q x_j) \approx V_j q^2 x_j^2 = \frac{m}{2} \omega_j^2 x_j^2$$

$$(17) \quad \omega_j = \sqrt{\frac{2q^2 V_j}{m}} = 2\sqrt{E_R V_j} / \hbar$$

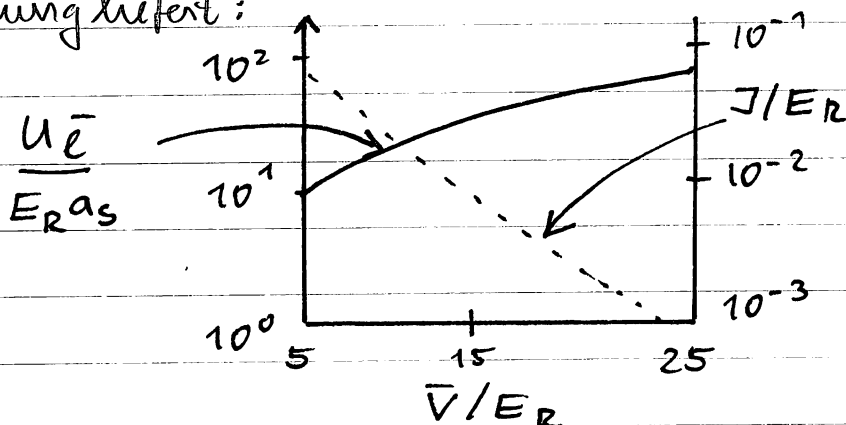
Einsetzen von ϕ_0 in (15) durch den Grd der harm. Oszillation mit Ausdehnung $l_j = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_j}}$, $j \in \{1,2,3\}$, liefert

$$(18) \quad \boxed{u \simeq \frac{\hbar \bar{\omega}}{12\pi} \frac{a_s}{\bar{e}}} \quad \begin{aligned} \bar{\omega} &= \sqrt[3]{\omega_x \omega_y \omega_z} \\ \bar{e} &= \sqrt[3]{l_x l_y l_z} \end{aligned}$$

Es gilt

$$(19) \quad \frac{\bar{\omega}}{\bar{e}} = \sqrt{\frac{m}{\hbar}} \sqrt{\omega_x \omega_y \omega_z} = \frac{2\sqrt{2}}{\hbar^2} (E_R \bar{V})^{3/4}$$

D.h. Vergrößerung der Potentialtiefe $\bar{V} = \sqrt[3]{V_x V_y V_z}$ führt zu einem Anstieg der Wechselwirkung. Gleichzeitig nimmt das Matrixelement (13) für J ab. Eine numerische Rechnung liefert:



D. Jaksch, C. Brudev,
J.I. Cirac, C.W. Gardiner
P. Zoller
Phys. Rev. Lett. 81
3108 (1998)

(B) Der Mott-Isolator - Superfluid Phasenübergang

Der Bose-Hubbard Hamiltonian zeigt in Abhängigkeit vom Verhältnis aus hopping zu Wechselwirkung J/U einen Phasenübergang bei $T=0$. Da dieser Phasenübergang nicht durch die Temperatur, sondern durch die Systemparameter kontrolliert wird, spricht man von einem Quantenphasenübergang. Wir wollen diesen in einem großkanonischen Ensemble studieren, d.h. wir betrachten den Grundzustand ($\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G} = e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} / \mathcal{Z}$ für $\beta \rightarrow \infty$) von

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \hat{H} - \mu \hat{N} \\ (20) \quad &= J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j - \mu \sum_i \hat{n}_i + \frac{U}{2} \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir zunächst ein homogenes System vorausgesetzt. Gl. (20) läßt sich in der Form

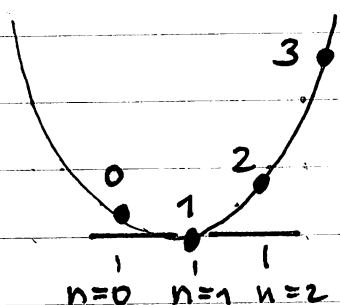
$$\begin{aligned} (21) \quad \hat{K} &= J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + \sum_i \hat{K}_i \\ \hat{K}_i &= \frac{U}{2} (\hat{n}_i - \bar{n})^2 + \text{c-Zahl} \end{aligned}$$

schreiben, wobei

$$(22) \quad \bar{n} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{U}$$

gilt. Es ist nun instruktiv zunächst den Grenzfall $J=0$ zu betrachten. Dann separiert $\hat{K}$ in unabhängige

Oszillatoren $\hat{k}_i$ pro Topf. In Besetzungszahldarstellung findet man das folgende Spektrum:



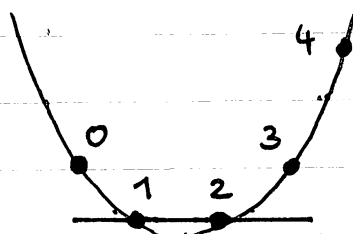
nur Zustand
mit $n=1$

$$0 < \frac{\mu}{\omega} < 1$$

$$(23) \quad \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial \mu} = 0$$

$$(24) \quad \kappa = \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial \mu} \quad \text{Kompressibilität}$$

Mott-Isolator

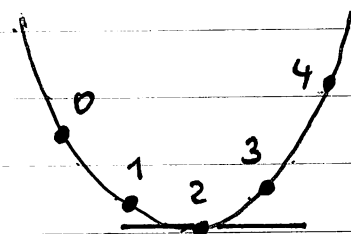


Zustand $n=1$
und $n=2$

$$\frac{\mu}{\omega} = 1$$

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial \mu} = \infty$$

Superfluid



nur Zustand
mit $n=2$

$$1 < \frac{\mu}{\omega} < 2$$

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial \mu} = 0$$

Mott Isolator

Das vollständige Phasendiagramm für $J \neq 0$ kann mittels eines mean-field Ansatzes (M.P.A. Fisher et al. Phys. Rev. B 40 (1989) 546) näherungsweise bestimmt werden. Dazu wird in dem hopping Term (und nur dort) folgende Näherung gemacht

$$(25) \quad \hat{b}_i = \langle b \rangle + \hat{\xi}_i$$

$$\text{O.B.d.A.} \quad \langle b \rangle = \langle b \rangle^*$$

$$\begin{aligned}
 \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j &= (\hat{\xi}_i^\dagger + \langle b \rangle)(\hat{\xi}_j + \langle b \rangle) \\
 &= \underbrace{\hat{\xi}_i^\dagger \hat{\xi}_j}_{\approx 0} + \hat{\xi}_i^\dagger \langle b \rangle + \langle b \rangle \hat{\xi}_j + \langle b \rangle^2 \\
 (26) \quad &= \hat{b}_i^\dagger \langle b \rangle + \langle b \rangle \hat{b}_j - \langle b \rangle^2
 \end{aligned}$$

Mit diesem Ansatz separiert $\hat{K}$ wiederum in lokale Terme

$$(27) \quad \hat{K} = \sum_i \hat{K}_i^{\text{eff}}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{K}_i^{\text{eff}} &= -zJ\langle b \rangle (\hat{b}_i^\dagger + \hat{b}_i) + \frac{\mu}{2} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \hat{b}_i \\
 (28) \quad &- \mu \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + zJ\langle b \rangle^2
 \end{aligned}$$

Hierbei ist $z = 2d$ die Anzahl der nächsten Nachbarn (in d -Dimensionen). Der Grundzustand von $\hat{K}_i^{\text{eff}}$ kann sehr einfach numerisch bestimmt werden, solange die

Teilenzahl pro Topf nicht zu groß ist. Wir wollen hier jedoch einen analytischen Ausdruck finden und behandeln die Terme proportional zu $J(b^\dagger + b)$ störungstheoretisch. In 0'ter Ordnung hat man

$$(29) \quad \hat{K}_i^{\text{eff}} \approx \frac{\mu}{2} \hat{n}(\hat{n}-1) - \mu \hat{n} + zJ\langle b \rangle^2$$

$$(30) \quad E_0 = \frac{\mu}{2} m(m-1) - \mu m + zJ\langle b \rangle^2$$

$$(31) \quad |G, z\rangle = |m\rangle$$

$$m = \lceil \bar{n} \rceil = \lceil \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\mu} \rceil$$

nächste ganze Zahl zu $\bar{n}$

Die Korrektur 1er Ordnung verschwindet, in 2. Ordnung hat man:

$$(32) \quad E_g^{(2)} = \sum_{n \neq m} \frac{|\langle m | V | n \rangle|^2}{E_n - E_0}$$

$$(33) \quad V = -z\tilde{J} \langle b \rangle (\hat{b}^\dagger + \hat{b})$$

Das liefert schließlich

$$(34) \quad E_g = a_0(u, \tilde{J}, \mu) + a_2(u, \tilde{J}, \mu) \langle b \rangle^2 + \mathcal{O}(\langle b \rangle^4)$$

Der noch unbekannte Ordnungsparameter $\langle b \rangle$ ergibt sich aus Minimierung von (34) bzgl. $\langle b \rangle$.

$$(35) \quad a_2(u, \tilde{J}, \mu) > 0 \quad \Rightarrow \quad \langle b \rangle \equiv 0$$

$$a_2(u, \tilde{J}, \mu) < 0 \quad \Rightarrow \quad \langle b \rangle \neq 0$$

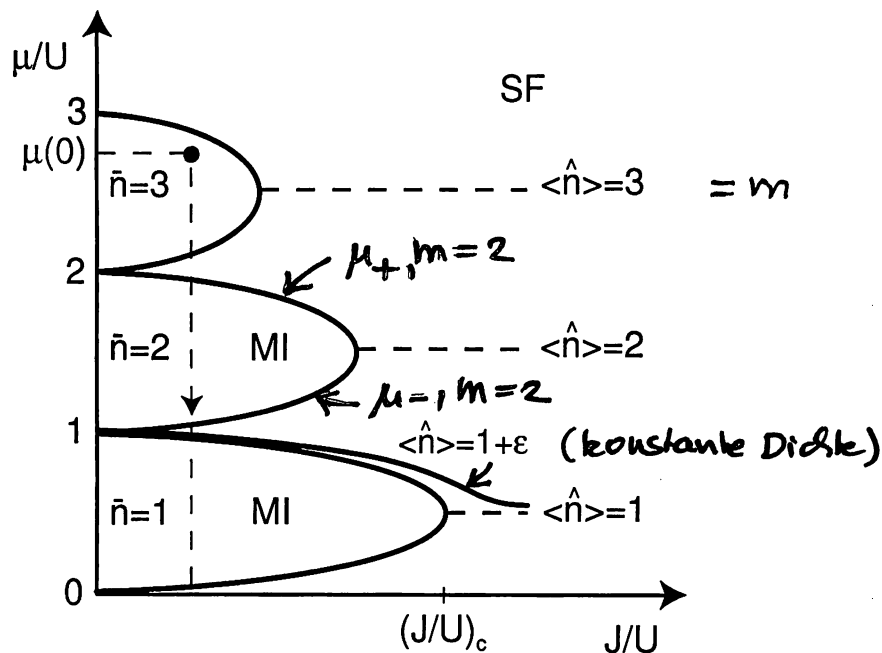
Der exakte Wert von $\langle b \rangle$ ergibt sich im zweiten Fall erst durch Hinzunahme des Terms 4. Ordnung.

Der Übergang $\langle b \rangle = 0 \leftrightarrow \langle b \rangle \neq 0$ definiert den Quantenphasenübergang. Man findet

$$(36) \quad a_2 = z\tilde{J}^2 \left[\frac{m}{u(m-1) - \mu} + \frac{m+1}{\mu - um} \right] + z\tilde{J}$$

$a_2 = 0$ hat die Lösungen $\bar{\mu} = \mu / z\tilde{J}$, $\bar{u} = u / z\tilde{J}$

$$(37) \quad \bar{\mu}_{\pm} = \frac{1}{2} (\bar{u} (2m-1) - 1) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\bar{u}^2 - 2\bar{u}(2m+1) + 1}$$



W. Zwerger
cond-mat/
0211314

Figure 1. Schematic zero temperature phase diagram of the Bose-Hubbard model. The dashed lines of constant integer density $\langle \hat{n} \rangle = 1, 2, 3$ in the superfluid phase (SF) hit the corresponding Mott-insulating (MI) phases at the tips of the lobes at a critical value of J/U , which decreases with density $\bar{n}$. For $\langle \hat{n} \rangle = 1 + \epsilon$ the line of constant density stays outside the $\bar{n} = 1$ MI because a fraction ϵ of the particles remains superfluid down to the lowest values of J . In an external trap with a $\bar{n} = 3$ MI phase in the center, a series of MI and SF regions appear by going towards the edge of the cloud, where the local chemical potential has dropped to zero.

Oberhalb des kritischen Wertes von J/U , bei dem der Wurzelterm in (37) negativ wird, existiert nur noch eine superfluide Phase

$$(38) \quad \bar{U}_c^2 - 2\bar{U}_c(2m+1) + 1 = 0$$

$$(39) \quad \bar{U}_c = (2m+1) + \sqrt{(2m+1)^2 - 1}$$

Für $m=1$

$$(40) \quad \boxed{\left(\frac{U}{J}\right)_c \cong 5.83 \approx}$$

Im Rahmen der mean-field Theorie findet man weiterhin, daß das Anregungsspektrum im MI

eine Energielücke aufweist, während es im SF Bereich ohne Lücke zunächst linear im Quasimpuls k ansteigt. Korrelationen können in der mean-field Näherung nicht berechnet werden.

Das mean-field Phasendiagramm stimmt mit dem tatsächlichen Phasendiagramm in $d=3$ Dimensionen gut überein. Auch findet man in $d=3$ tatsächlich langreichweitige Korrelationen im superfluiden Bereich

$$(41) \quad \langle \hat{b}_i^+ \hat{b}_{i+k} \rangle_{SF} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d=3} \text{ konst. } (\hat{=} \langle \hat{b} \rangle^2)$$

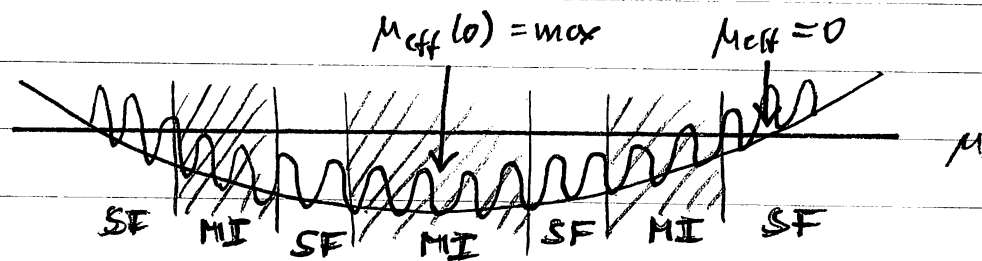
In $d=2$ und $d=1$ zerfallen die tatsächlichen Korrelationen algebraisch. Insbesondere für $d=1$ ist das mean-field Phasendiagramm quantitativ falsch.

$$(42) \quad \langle \hat{b}_i^+ \hat{b}_{i+k} \rangle_{SF} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d=1,2} \sim k^{-\alpha}$$

Im MOI-Isolator Zustand zerfallen die Korrelationen exponentiell

$$(43) \quad \langle \hat{b}_i^+ \hat{b}_{i+k} \rangle_{MI} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d=1,2,3} \sim e^{-\alpha|k|}$$

Hat man zusätzlich zum periodischen Potential ein langsam veränderliches Fallepotential, so kann dieses in einer lokalen-Dichte Approximation (LDA) in einem effektivem chemischen Potential berücksichtigt werden:



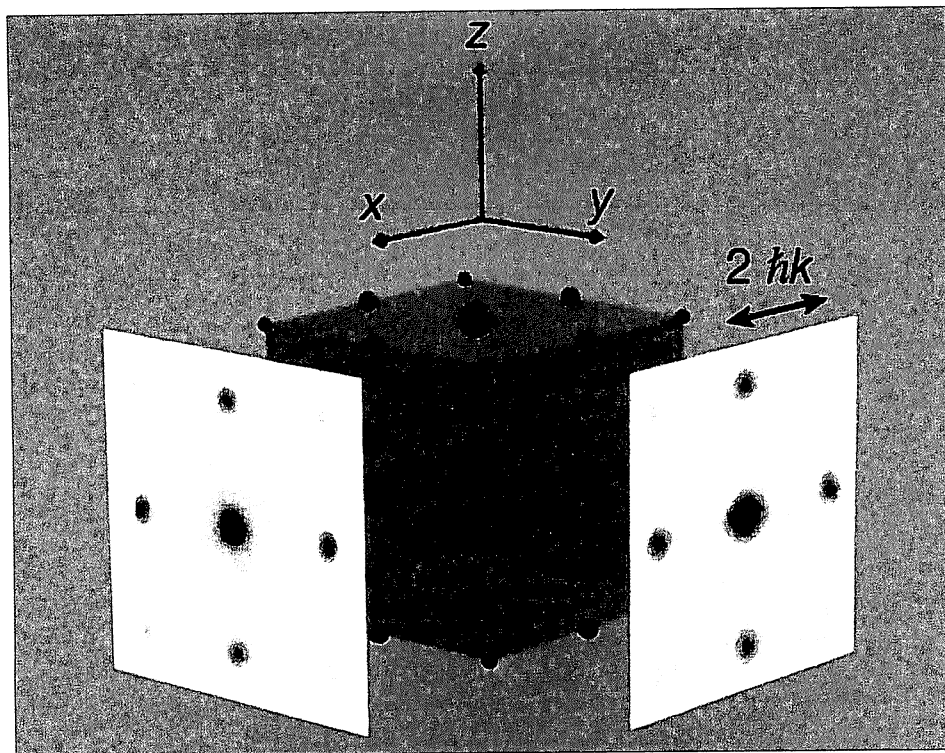
(44) $\mu \rightarrow \mu_{\text{eff}} = \mu - \epsilon_i$

Damit erhält man räumliche Bereiche von MI und SF Phasen, wobei gemäß der Abbildung auf S. 131 am äußeren Rand stets eine SF Phase auftritt

Experimentell ist der MI-SF Phasenübergang (bei $T > 0$) erstmals im Jahr 2002 an der LMU München beobachtet worden. Dabei wurde ausgenutzt daß im MI keine Korrelationen existieren. Schaltet man das Fallenpotential und das Gitterpotential abrupt ab, expandieren die Wannierfunktionen, Überlagerungen verschiedener expandierender Wannierzustände führt zu einem Interferenzmuster, welches mittels Absorptionsmessungen beobachtbar ist. Dieses Interferenzmuster tritt aber nur auf, falls langreichweitige Korrelationen existieren, also in der superfluiden Phase. Im MI ist

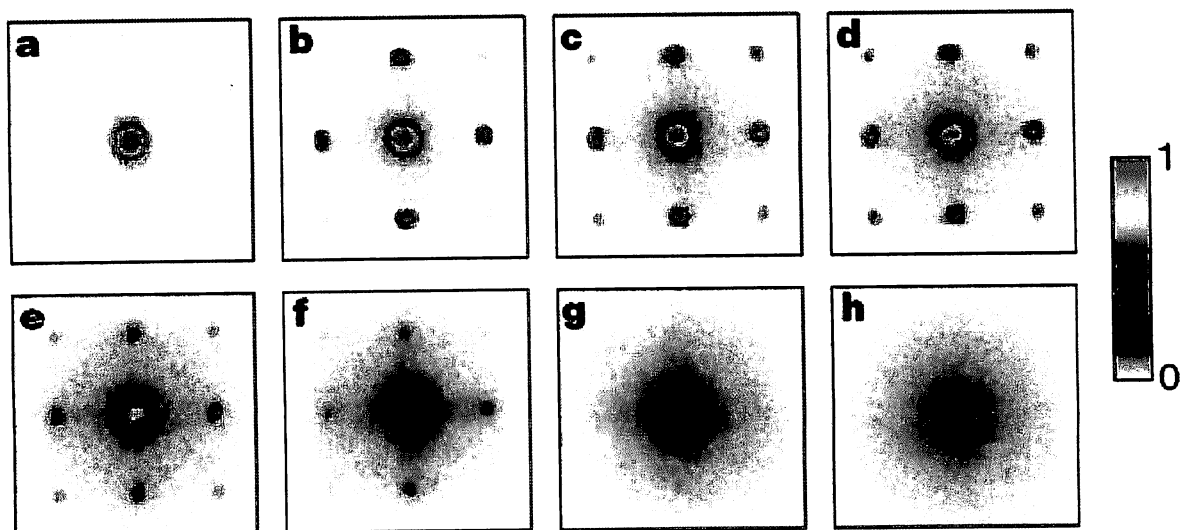
(45) $| \psi \rangle \xrightarrow{J/\mu \rightarrow 0} \frac{1}{i} | n \rangle ;$

und $\langle b_i^\dagger b_{i+n} \rangle \equiv 0$. Bei Vergrößerung der Potentialtiefe gibt es den SF $\rightarrow$ MI Übergang und Interferenzen verschwinden. Verringert man das Potential wieder, erdensen die Interferenzen erneut.



3D interference pattern after lattice switch-off

M. Greiner et al. Nature 415 39 (2002)



potentialtiefe des Gitters V_0 / E_R

a: 0 b: 3 c: 7 d: 10 e: 13 f: 14
g: 16 h: 20

(c) Kollaps und Revival eines anharmonischen Oszillators

Im Grenzfall tiefer Potentialtöpfe in dem das Tunneln zwischen den Töpfen vernachlässigt werden kann, stellt das Gittersystem ein Ensemble identischer ungekoppelter anharmonischer Oszillatoren da mit

$$(46) \quad H_i = \hbar \omega \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \frac{\hbar \omega_e}{2} \hat{b}_i^{\dagger 2} \hat{b}_i^2$$

Betrachtet man die Dynamik eines anfänglichen kohärenten Zustandes (einer Situation wie sie nach abruptem Einschalten des Gitterpotentials vorliegen würde)

$$(47) \quad |\psi(t=0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} e^{-|\alpha|^2/2} |n\rangle$$

findet man leicht

$$(48) \quad \begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\psi(0)\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{n!} e^{-\frac{i\omega_e}{2} n(n-1)t} |n\rangle, \end{aligned}$$

Für Zeiten t die ein Vielfaches von

$$(49) \quad T = \frac{\pi}{\omega_e/2}$$

sind, entsteht wiederum ein kohärenter Zustand mit $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$, da $n(n-1)$ eine gerade Zahl ist.

Eine interessante Situation entsteht aber auch für

$$t = T/2:$$

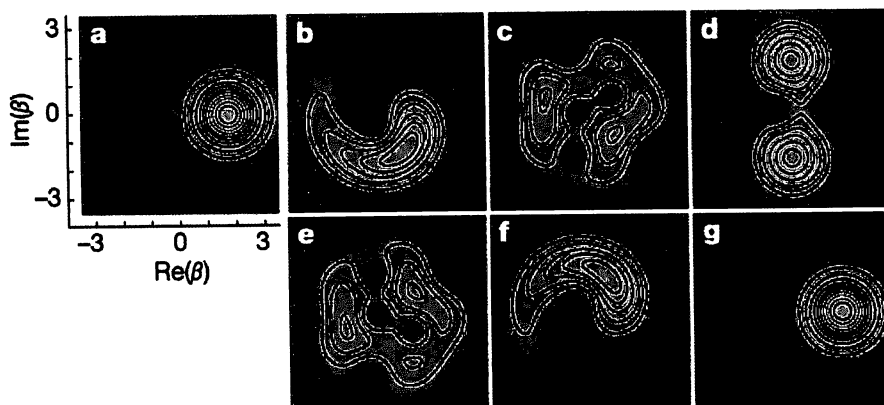
$$(50) \quad |\psi(T/2)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n \in \{4m, 4m+1\}} \frac{[\alpha(T/2)]^n}{n!} |n\rangle$$

$$- e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n \in \{4m+2, 4m+3\}} \frac{[\alpha(T/2)]^n}{n!} |n\rangle$$

Dies entspricht zwei nahezu identischen Zuständen mit relativer Phase π . In dem Zeitintervall $0 \dots T/2$ findet ein Zerfließen (Kollaps) des anfänglich kohärenten Zustandes statt, wobei sich bei $t = T/4$ bestimmte Strukturen bilden. Im Intervall $T/2 \dots T$ wird der anfängliche Zustand schließlich rekonstruiert (Revival).

Simulation der Q-Funktion

$$(51) \quad Q(\beta) = |\langle \beta | \psi(t) \rangle|^2$$



Kollaps und Revival der Wellenfunktion sind ebenfalls in einem Gitter basierten Atom beobachtet worden; Greiner et al. Nature 419, 51 (2002)