

7. Bose-Einstein Kondensate und Superfluidität

In Kapitel 6 hatten wir bei der Diskussion des Bogoliubov-Anregungsspektrums für $T \rightarrow 0$ die Eigenschaft der Superfluidität des Bosekondensats kennengelernt. Das wollen wir aufgreifen und etwas quantitativ diskutieren. Wir hatten in (7-33) gesehen, daß ein bewegtes Teilchen oder Hindernis nur dann Energie an das Kondensat abgeben kann, wenn

$$(1) \quad u \geq u_{\text{krit}} = \min_{\vec{p}} \frac{E(\vec{p})}{p}$$

Für $u < u_{\text{krit}}$ bleibt das Gas superfluid (Landau's Kriterium der Superfluidität).

Betrachten wir nun ein Kondensat bei endlicher Temperatur T . In diesem gibt es eine nicht verschwindende Anzahl von Bogoliubov Quasiteilchenanregungen mit Dichteverteilung (siehe 7-36)

$$(2) \quad \sum_k \langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \rangle (|u_k|^2 + |v_k|^2)$$

Diese können als thermisch angeregte Atome betrachtet werden, die sich im Gegensatz zum Kondensat und den Atomen in nicht-kondensatzuständen aufgrund der Wechselwirkung (quantum depletion) wie eine normale Flüssigkeit verhalten. D.h. ein Bosegas mit

$0 < T < T_{\text{krit}}$ kann als zweikomponentiges Fluid betrachtet werden. Es gibt eine superfluide und eine normalfluide Komponente. Erste ist i.A. nicht mit dem Kondensat identisch!

7.1. normalfluide und superfluide Dichten im BEC

Um festzustellen ob ein Gas normal- oder superfluid ist betrachten wir eine Kapillare, die sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}_n$ durch das Gas bewegt. Das System sei im therm. Gleichgewicht, d.h. die normale Komponente wird sich ebenfalls mit $\vec{v}_n$ bewegen. $\vec{v}_s$ sei die Geschwindigkeit der superfluiden Komponente. Für die Energie der Bogoliubov-Anregungen im Rinkesystem der Kapillare hat man

$$(3) \quad E_{\vec{k}} + \hbar \vec{k} \cdot (\vec{v}_s - \vec{v}_n)$$

Damit folgt für die Zahl der Quasiteilchen die Boseverteilung

$$(4) \quad N_{\vec{k}} = \left[\exp \left(\frac{E_{\vec{k}} + \hbar \vec{k} \cdot (\vec{v}_s - \vec{v}_n)}{k_B T} \right) - 1 \right]^{-1}$$

Für die Massendichte der normalfluiden Komponente gilt

$$(5) \quad \rho_n(\vec{v}_n - \vec{v}_s) = \frac{\sum_{\vec{k}} \vec{p}_{\text{Quasiteilchen}}}{V^3} = \hbar \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} N_{\vec{k}} \vec{k} \quad \left(\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V^3}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} \right)$$

Entwickelt man $N_{\vec{k}}$ in eine Tayloreihe in $(\vec{v}_n - \vec{v}_s)$

und behält nur den linearen Term, findet man

$$(6) \quad S_n = -\frac{1}{3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} k^2 \frac{dN_{\vec{k}}(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\vec{0}_S - \vec{0}_n = 0}$$

Für $k_B T \ll \mu$ ist nur der lineare Teil des Bogoliubov-Spektrums interessant, d.h.

$$(7) \quad \epsilon(\vec{k}) \cong c_s \hbar k$$

In diesem Fall läßt sich (6) weiter auswerten

$$(8) \quad S_n = -\frac{1}{3\hbar c_s} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} k^2 \frac{dN}{dk} = \frac{2\pi^2 (k_B T)^4}{45\hbar^3 c_s^5}$$

($k_B T \ll \mu$)

Man erkennt folgendes:

(i) bei $T=0$ ist das gesamte Gas superfluid obwohl es eine endliche Atomzahl außerhalb des Kondensats gibt (quantum depletion, Gl. (7-38))

(ii) $S_n \sim (k_B T)^4$ während $S_{nc} \sim (k_B T)^2$
(S_{nc} nicht kondensierte Atome) für $k_B T \ll \mu$

§.2. Erster und zweiter Schall (first and second sound)

Im letzten Kapitel hatten wir gesehen, daß bei $T \rightarrow 0$ die Quasianregungen Phononen sind mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$(9) \quad c_s = \frac{\omega_{\vec{k}}}{k} = \frac{d\omega_{\vec{k}}}{dk} = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{m}} \quad \text{zero sound}$$

Bei $T \rightarrow 0$ gibt es nur eine superfluide Komponente.

Wenn $T \neq 0$ liegt auch noch eine normalfluide Komponente vor, die eine andere Schallgeschwindigkeit hat. Auf die Ableitung dieser Größen soll hier verzichtet werden. Näheres kann im Buch von Pitaeckii und Shingari nachgelesen werden. Man findet für

$$\underline{k_B T \ll \mu}$$

$$(10) \quad c_2^2 = \frac{1}{3} c_1^2 \quad c_1^2 \simeq \frac{\rho_0 g}{m}$$

second sound
(Temp. - wellen)

first sound
(Druckwellen)

$$\underline{k_B T > \mu}$$

$$(11) \quad c_2^2 \simeq \frac{\rho_0(T) g}{m} \quad c_1^2 = \frac{5}{3} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \frac{k_B T}{m}$$

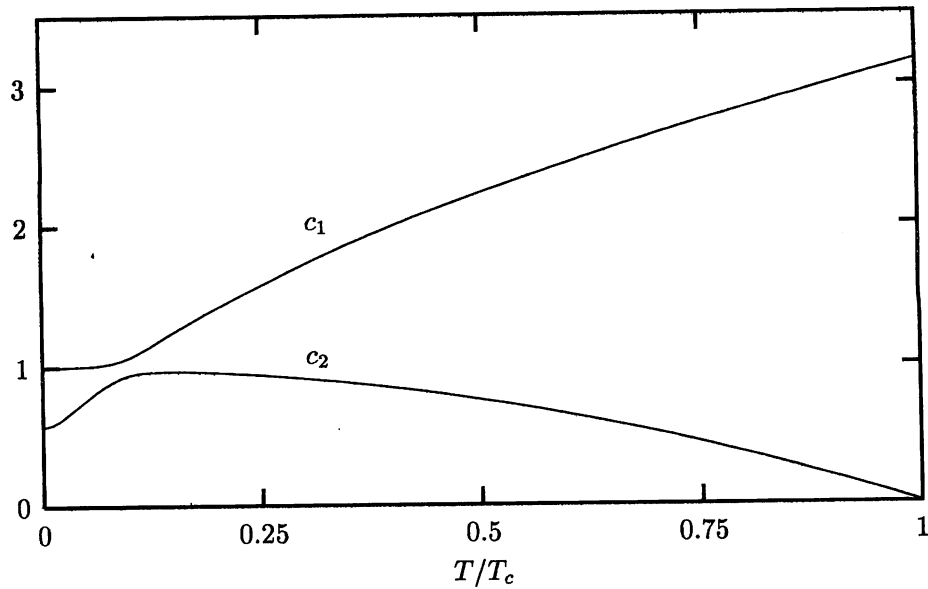


FIG. 6.1. Schematic representation of the velocity of first and second sound in a dilute Bose gas as a function of temperature. The figure points out the effect of hybridization between the two modes taking place at low temperature. Above T_c only the first sound survives

aus Pitajevskii & Stringari
 "Bose-Einstein Condensation"
 Oxford Sc 2003