(G) Lösungen der GPGL mit topologischer Ladung: Vortex Lösungen

Wir betrachten nun komplexwertige Lösungen der GPGL in einem axialsymmetrischen Potential. Aus Symmetriegründen muß gelten:

$$|\phi(r,z,\varphi+2\pi)|^2 = |\phi(r,z,\varphi)|^2 \tag{178}$$

D.h. bei Zerlegung der Kondensatwellenfunktion in Amplitude und Phase

$$\phi(\vec{r}) = |\phi(\vec{r})|\, e^{iS/\hbar} \tag{179}$$

muß gelten

$$S(\varphi+2\pi) = S(\varphi) + 2\pi\hbar q \qquad q=0,1,2,\ldots \tag{180}$$

Man spricht von einer <u>Vortexlösung</u> falls $q \geq 1$.

q heißt <u>topologische Ladung</u> der Vortex

Falls ein Vortex vorliegt muß auf der Achse, d.h. für $r=0$ gelten

$$\phi(r=0,z,\varphi) = 0 \qquad (q\neq 0) \tag{181}$$

Man findet für die Zirkulation

$$\Gamma = \oint_C \vec{v}_q \cdot d\vec{r} = \frac{\hbar}{m} 2\pi q \tag{186}$$

D.h. die Zirkulation eines Bosekondensats ist quantisiert. Es treten nur Vielfache von $\hbar/m$ auf.

Falls $q \geq 1$ kann nach dem Stokesschen Satz $\vec{\nabla} \times \vec{v}_q$ nicht überall verschwinden, andererseits ist ein BEC eine rotationsfreie Flüssigkeit mit $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$. Tatsächlich ist $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ bis auf die Singularität bei $r = 0$ wo allerdings $\varrho = 0$ gilt.

Einsetzen von (183) in die GPGL liefert

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_\perp + \frac{\hbar^2 q^2}{2m r^2} + \frac{m}{2} (\omega_\perp^2 r^2 + \omega_z^2 z^2) + g N_0 \phi_q^2 \right] \phi_q = \mu \phi_q \tag{187}$$

Die Präsenz des Zentrifugalterms q^2/r^2 zeigt, daß $\phi_q \to 0$ für $r \to 0$. Im wechselwirkungsfreien Fall, d.h. für $g = 0$ ist die Lösung von (187)

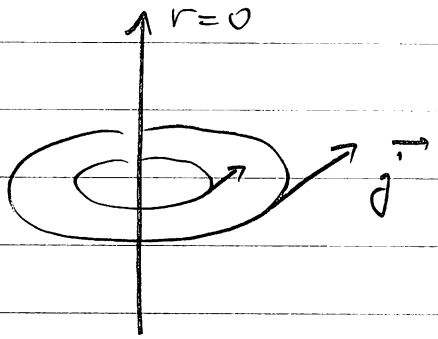
$$\phi_1(r,z) \sim r \exp\left\{ -\frac{m}{2\hbar} (\omega_\perp r^2 + \omega_z z^2) \right\} \tag{188}$$

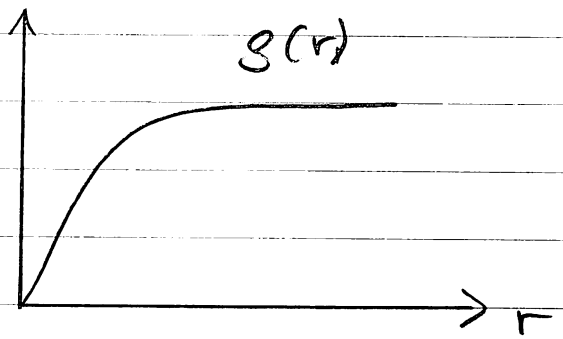
Hier wurde $q = 1$ gewählt. Das ist gerade der

Für ein (quasi) unendlich ausgedehntes Kondensat kann die Achse des Vortex auch außerhalb der $r=0$ Achse liegen und ein Kondensat kann mehrere Vortexlinien haben. Die Änderung der Phase des Kondensats bei einem geschlossenen Umlauf um mehrere Vortexlinien ist die Summe der eingeschlossenen Vortexladungen.

Ein Vortex ist verbunden mit einem zirkulierenden Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\vec{j} = s \frac{\nabla S}{m} \tag{182}$$





Für einen Vortex der Ladung q gilt

$$\phi(\vec{r}) = \phi_q(r,z)\, e^{iq\varphi} \tag{183}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\phi_q = \phi_q^*$

d.h.

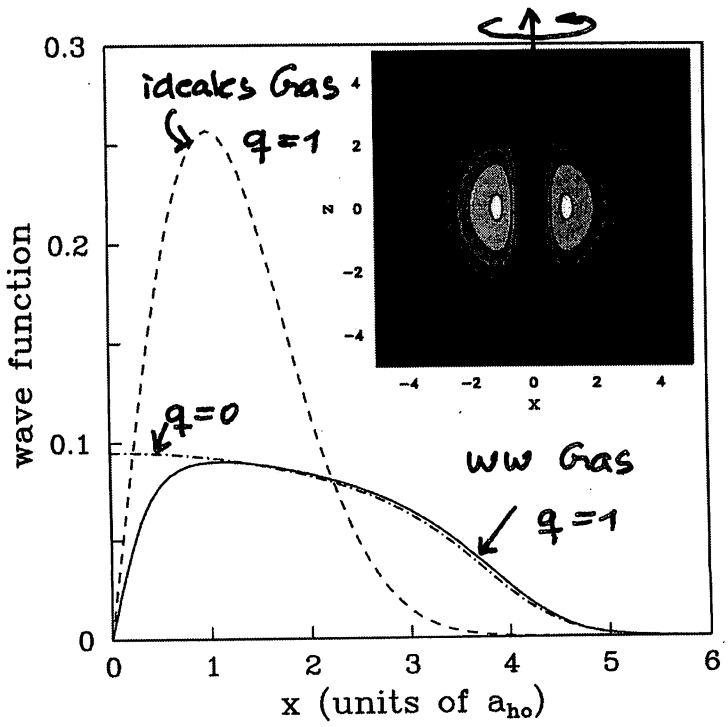
$$\vec{j}_q = s \frac{\hbar q}{mr} \vec{e}_\varphi = s \vec{v}_q \tag{184}$$

$$\vec{v}_q = \frac{\hbar q}{mr} \vec{e}_\varphi \tag{185}$$

erste angeregte Oszillatorzustand in transversaler Richtung. Die Energie dieses Zustandes ist (für $q=0$)

$$E_{q=1} = E_{q=0} + N_0 \hbar \omega_L \tag{189}$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt ϕ_1 (gestrichelte Linie). Die durchgezogene Linie entspricht der Lösung von (187) mit Wechselwirkung für $q=1$



Dalfovo et al.
Rev. Mod. Phys.
71 (1999) 463

$\omega_L = \omega_z$

Da die Vortexenergie (189) größer als die Kondensatenergie für $q=0$ ist, sind Vortices in einem ruhenden Potential instabil.

Rotiert man jedoch das Kondensat mit der Winkelgeschwindigkeit Ω, so gibt es eine zusätzliche Energie im rotierenden Bezugssystem

(190) $\hat{H}_\Omega = \hat{H}_0 - \Omega \hat{L}_z$

wobei $\hat{L}_z = N\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ der Drehimpulsoperator in z-Richtung ist. Für einen Vortex der Ladung q gilt offensichtlich

(191) $$\hat{L}_z \phi(\vec{r}) = N\hbar q \, \phi(\vec{r})$$

Für hinreichend große Werte von Ω haben Zustände mit $L_z = N\hbar q$ und $q \geq 1$ eine niedrigere Energie als das vortexfreie Kondensat. Die kritische Rotationsfrequenz bei der Vortices entstehen können ist

(192) $$\Omega_{krit} = \frac{1}{\hbar q} \left(\frac{E_q}{N} - \frac{E_0}{N} \right)$$

wobei E_0 und E_q die Energien mit und ohne Vortex bedeuten.

Bei Rotation mit $\Omega < \Omega_{krit}$ bildet sich kein Vortex und $L_z = 0$. Dies ist eine weitere Konsequenz der Superfluidität des Kondensats.

Die nachfolgende Figur zeigt die numerisch berechnete kritische Winkelgeschwindigkeit für ^{87}Rb und eine Fallengröße $a_0 = 0{,}791\,\mu m$.

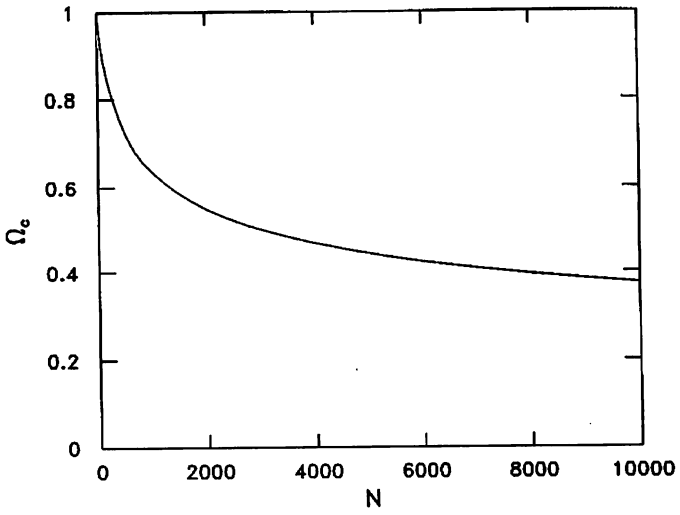


FIG. 32. Critical angular velocity, in units of $\omega_\perp$, for the formation of a $\kappa=1$ vortex in a spherical trap with N atoms of ^{87}Rb and $a_{ho}=0.791\ \mu$m.

Dalfovo et al.
Rev. Mod. Phys.
71 (1999) 463

Für große Werte von N geht Ω_c gegen eine Konstante

$$\Omega_c \simeq \frac{5\hbar}{2mR_\perp^2} \ln \frac{0.671 R_\perp}{\xi} \qquad (q=1) \tag{193}$$

Hierbei ist $R_\perp$ der Thomas Fermiradius in transversaler Richtung und ξ die healing length.

Da der Zentrifugalterm für $q \geq 1$ dem Kollaps des Kondensats bei attraktiver Wechselwirkung (d.h. g bzw $a<0$) entgegenwirkt, ist die maximale Anzahl von Atomen N_{krit} für eine Vortexlösung in einem rotierenden Kondensat größer als für $q=0$ im ruhenden System.

Wir wollen uns nun die Frage stellen was mit einem Vortex passiert wenn er erst einmal erzeugt ist. Dazu betrachten wir die GPGL in 2-D im T-F Limes

und machen den Ansatz für $q=1$

$$\phi_{q=1}(x,y) = \phi_0(x,y) \tanh\left[k\,|\vec{r}-\vec{\alpha}R|\right] e^{i\varphi_{\vec{\alpha}R}} \tag{194}$$

Hierbei sind k und $\vec{\alpha}$ offene Parameter. $\vec{\alpha}$ ist ein Vektor in der (x,y) Ebene, R der Thomas-Fermi Radius ohne Vortex und $\varphi_{\vec{\alpha}R}$ ist der Polarwinkel um die Vortexachse bei

$$\vec{r}_0 = \vec{\alpha} R \qquad 0 \le |\vec{\alpha}| \le 1 \tag{195}$$

Der Ansatz (194) beschreibt also einen Vortex und ein zur z-Achse parallele Achse bei $\vec{r}_0$ und mit einer Ausdehnung des Zentrums von der Größe $1/k$. Setzt man (194) in das GP-Energiefunktional ein und minimiert man die Energie ergibt sich

$$\frac{\hbar^2 k^2}{m} = 0.59\left[\mu_0 - \frac{1}{2} m\omega^2 (\alpha R)^2\right] \tag{196}$$

sowie die Energie am Extremalpunkt

$$E_{q=1} = E_0 + W(\vec{\alpha}) \tag{197}$$

mit

$$W(\vec{\alpha}) = N\left(\frac{\hbar\omega}{\mu_0}\right)^2 \left\{\frac{1}{2} + (1-\alpha^2)\left[\frac{2\ln 2 + 1}{3} + \ln\frac{0.493\,\mu_0}{\hbar\omega} + \ln(1-\alpha^2)\right]\right\} \tag{198}$$

Hierbei ist μ_0 das chemische Potential ohne Vortex. Man sieht folgendes:

(i) $W(\alpha)$ ist eine monoton fallende Funktion von α. D.h. ein eventuell existierender Vortex wird sich zum Rand der Falle bewegen ($\alpha = 1$).

(ii) Für $\alpha = 1$ ist

$$\mu_0 = \frac{1}{2} m\omega^2 (\alpha R)^2$$

d.h. $\kappa = 0$. D.h. die Vortexlösung (194) verschwindet. D.h. der Vortex muß sich am Rand auflösen

Rotiert man die Falle jedoch mit Winkelgeschwindigkeit Ω ist die Energie im rotierenden BS

(199) $$W_\Omega(\vec{\alpha}) = W_{\Omega=0}(\vec{\alpha}) - N\hbar\Omega(1-\alpha^2)^2$$

Für $\Omega > \Omega_{krit}$ ergibt sich dann ein lokales Minimum bei $\alpha = 0$. D.h. der Vortex kann zum Zentrum der Falle wandern und dort gefangen werden.

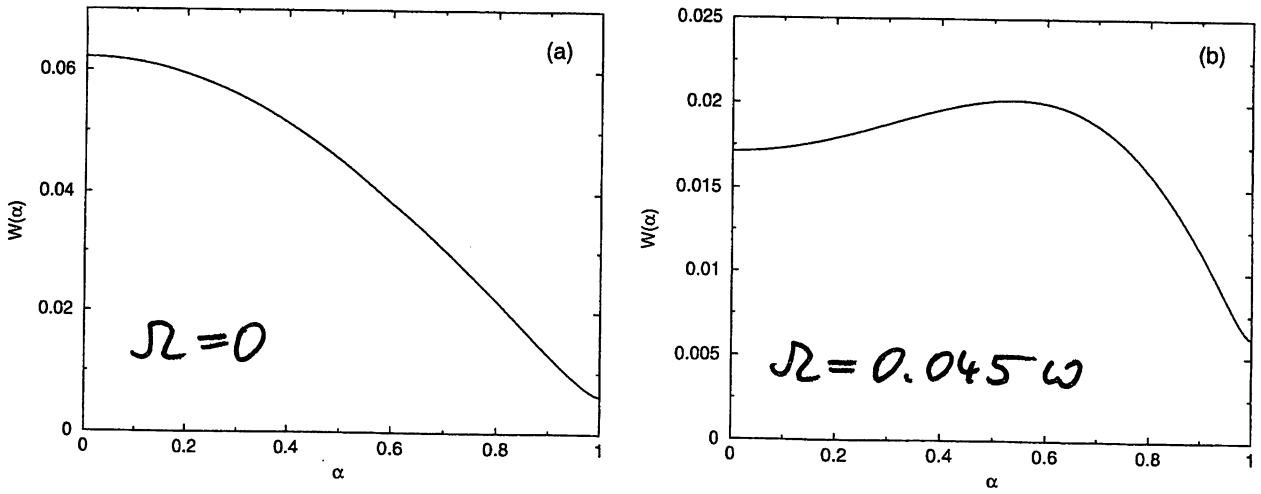
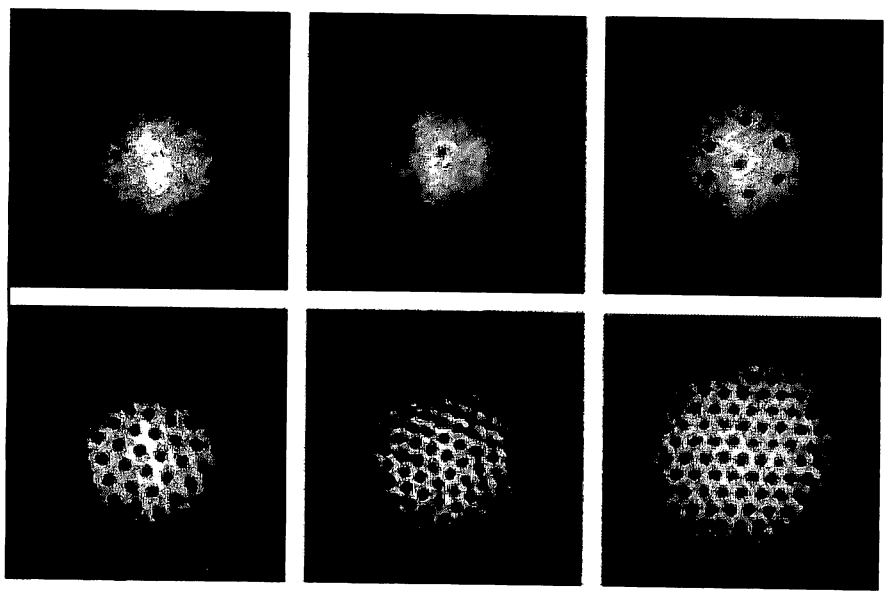


Figure 14: In a 2D model, effective potential energy W of a vortex in a quasi-axisymmetric harmonic trap as function of the distance αR of the core from the trap center, for $\mu_0 = 80\hbar\omega$. (a) $\Omega = 0$ and (b) $\Omega = 0.045\omega$. The unit of energy is $N\hbar\omega$ where ω is the oscillation frequency of the atoms in the trap.

from Y. Castin Les Houches LXXIII (2001)

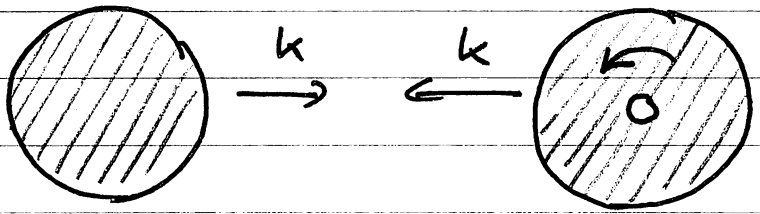
Vortizes mit $q > 1$ sind gegenüber Kondensaten mit mehreren $q = 1$ Vortices instabil. Die Vortexlinien bilden dabei eine Gitterstruktur, ein sog. Abrikosov-Gitter



from E. Cornell's group

Die Bildung und Dynamik von Vortexgittern sind ein aktuelles Thema der Forschung.

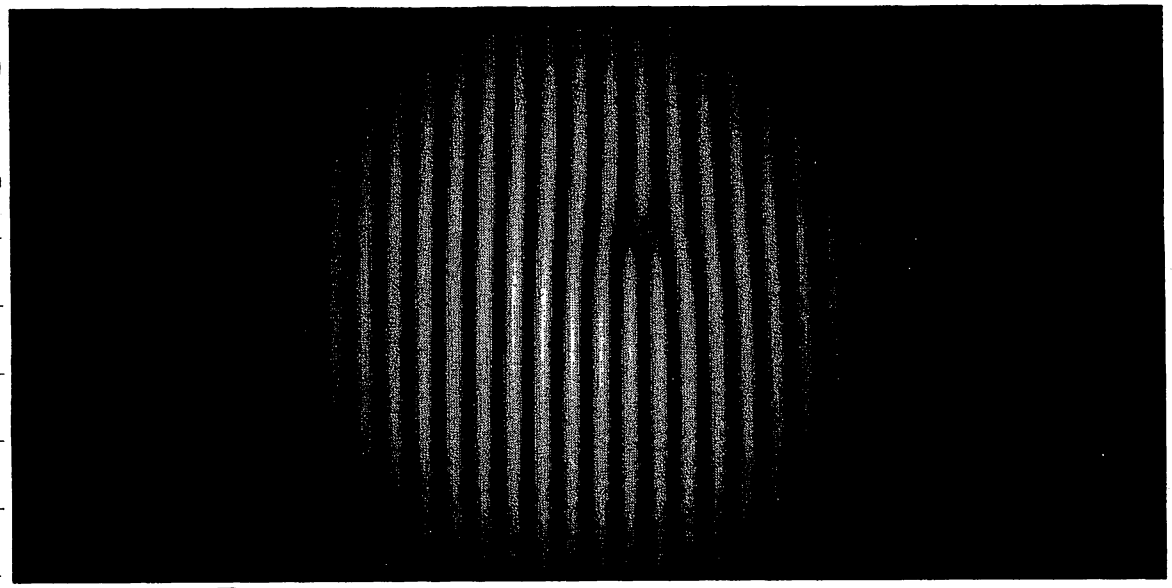
Der experimentelle Nachweis von Vortices ist schwierig. Indirekt kann ein Vortex über die verschwindende Dichte im Kern nachgewiesen werden (siehe oben). Eine Alternative ist die Beobachtung der Interferenz zweier Kondensate mit und ohne Vortex



$$\psi(\vec{r}) \sim \sqrt{n_1}\, e^{ikx} + \sqrt{n_2}\, e^{-ikx}\, e^{iq\varphi}$$

$$(200)\quad |\psi|^2 \simeq n_1 + n_2 + 2\sqrt{n_1 n_2}\cos(2kx - q\varphi)$$

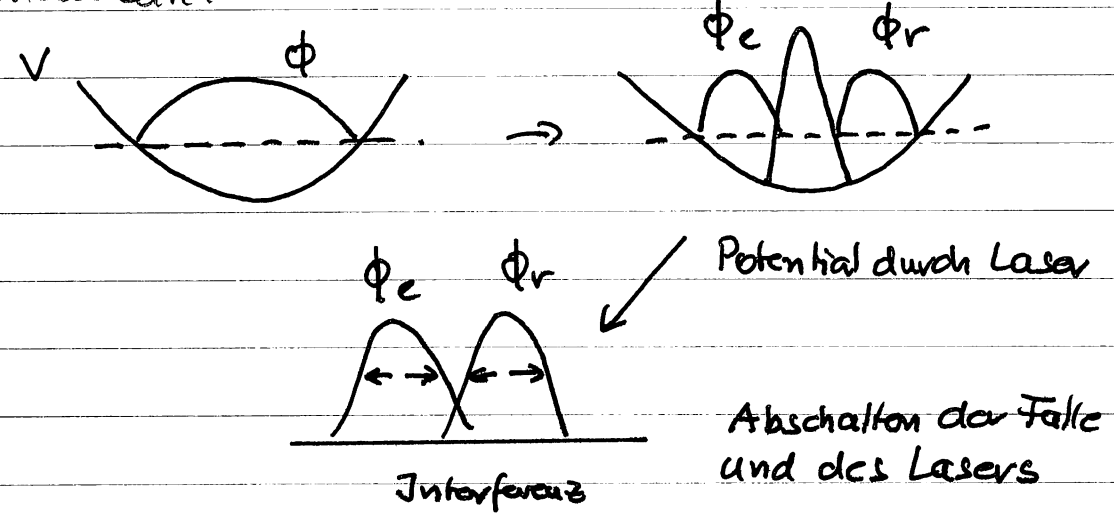
Das entstehende Muster zeigt eine Singularität:



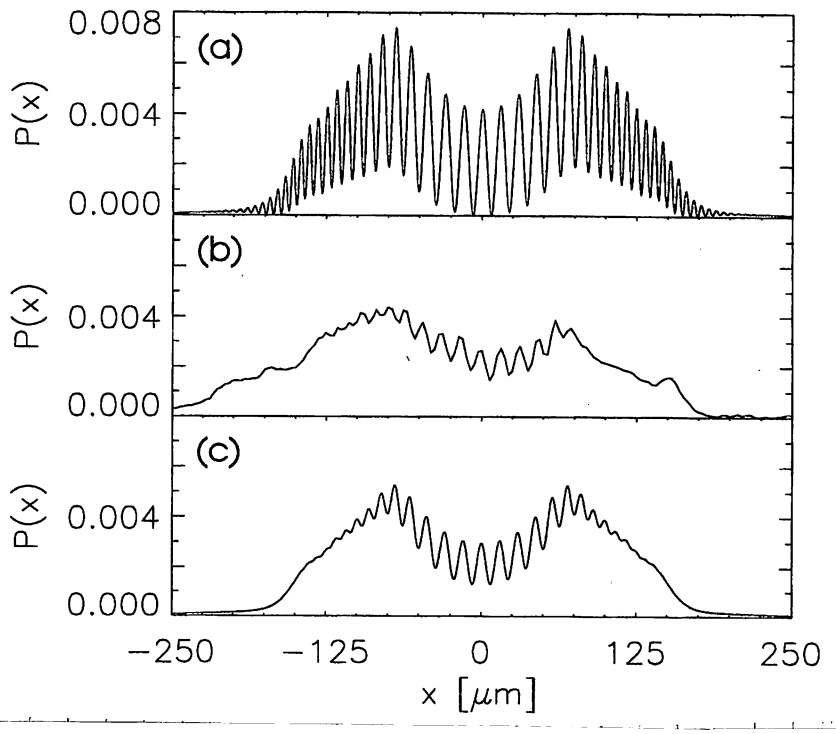
E. Bolda, D.F. Walls
Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 5477

(H) Interferenz von Bosekondensaten

Ein wichtiges experimentelles Ergebnis im Bereich der Bosekondensation war der 1997 gelungene Nachweis der Interferenz zweier unabhängiger Kondensate:



Spätere Experimente sind mit unabhängig gefangenen Kondensaten durchgeführt worden



berechnete Interferenz aus GPGL

gemessene Interferenz

Berechnung konvigiert mit Apparateauflösung

A. Röhrl etal. Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 4143

Für das theoretische Verständnis der Interferenzen ergab sich zunächst eine Schwierigkeit. Im Falle eines idealen Bosegases mit $2N$ Teilchen das in exakt zwei Hälften aufgeteilt wird, ist der Ausgangszustand ein Produkt aus Fockzuständen (in ebenen Wellen $\pm \hbar k$)

$$|\Psi\rangle = |N, k\rangle\, |N, -k\rangle \tag{201}$$

In einem solchen Zustand ist die relative Phase beider Kondensate jedoch unbestimmt. Wie kann also das Auftreten von Interferenzen wie sie aus den GPGl folgen verstanden werden? Für die Interferenzterme gilt:

$$\langle \Psi |\, \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}\, | \Psi \rangle \equiv 0 \tag{202}$$

d.h. mit

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \hat{a}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} + \hat{a}_{-k} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \tag{203}$$

folgt

$$\langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}_1)\, \hat{\Psi}(\vec{r}_2) \rangle = \text{konst} \tag{204}$$

Gl. (204) bringt aber nur zum Ausdruck, daß die Phase des Interferenzbildes a priori unbestimmt ist und bei einer Mittelung über mehrere Realisierungen verschwindet. Die Interferenz drückt sich vielmehr in der bedingten Wahrscheinlichkeit aus, am Ort $\vec{r}_2$ ein Teilchen zu finden, falls am Ort $\vec{r}_1$ eines detektiert wurde. Dies wird durch die 2-Teilchendichtematrix

beschrieben

(205)
$$g(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \langle \psi | \vec{\psi}^+(\vec{r}_1)\vec{\psi}^+(\vec{r}_2)\vec{\psi}(\vec{r}_2)\vec{\psi}(\vec{r}_1)|\psi\rangle$$

Im Zustand (203) findet man

$$\vec{\psi}(\vec{r}_2)\vec{\psi}(\vec{r}_1)|\psi\rangle = \sqrt{N(N-1)}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)}|N-2,\vec{k}\rangle|N,\vec{k}\rangle$$

(206)
$$+\sqrt{N(N-1)}\, e^{-i\vec{k}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)}|N,\vec{k}\rangle|N-2,-\vec{k}\rangle$$

$$+ \underbrace{N\,2\cos\left(\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right)|N-1,\vec{k}\rangle|N-1,-\vec{k}\rangle}$$

Interferenzterm

Für $N \gg 1$ folgt dann

(207)
$$g(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \cong N^2\left\{1+\frac{1}{2}\cos\left(2\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right)\right\}$$

Eine ähnliche Situation tritt bei der Interferenz zweier unabhängiger Laser auf. Die Quantentheorie des Lasers liefert ein stationäres Feld das keine ausgezeichnete Phase hat. Die Überlagerung führt auf ein Interferenzmuster mit apriori unbestimmter Phase. Auch hier werden Interferenzen erst bei der Betrachtung höherer Korrelationen im theoretischen Modell sichtbar.

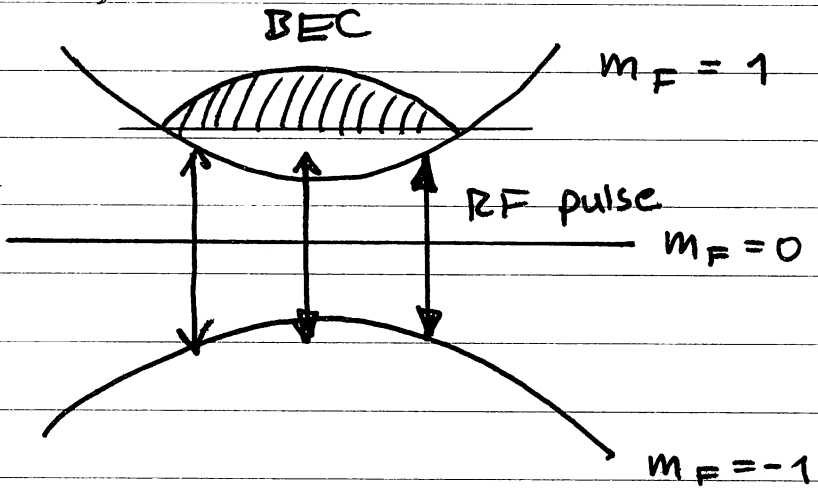
(J) Atomlaser

Ein Bosekondensat von Atomen hat wie ein Laser langreichweitige Korrelationen (große Kohärenzlänge) aufgrund der makroskopischen Besetzung eines einzelnen Quantenzustandes. Daher gibt es ein großes Interesse analog zum Laser eine kohärente Quelle von Atomen zu realisieren. Eine solche wird in loser Analogie zum Lichtfall "Atomlaser" genannt, obwohl natürlich keine Atome stimuliert erzeugt werden.* Tatsächlich werden Übergänge in bestimmte Bewegungszustände stimuliert. Auf die verschiedenen Ansätze soll hier nur in einem kurzen Überblick eingegangen werden:

MIT ^{23}Na (Ketterle):

magnetische Falle
Potential für Zeeman-Zustände verschieden

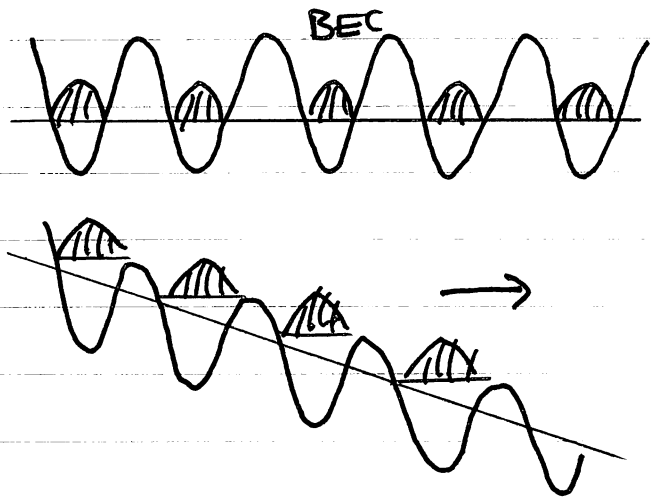
RF Pulse
⇒ Wellenpakete



---

* Dazu folgende Bemerkung von Nobelpreisträger W.E. Lamb:
"There are no atom lasers. And if there is one I would like to get one for gold atoms." (sinngemäß)

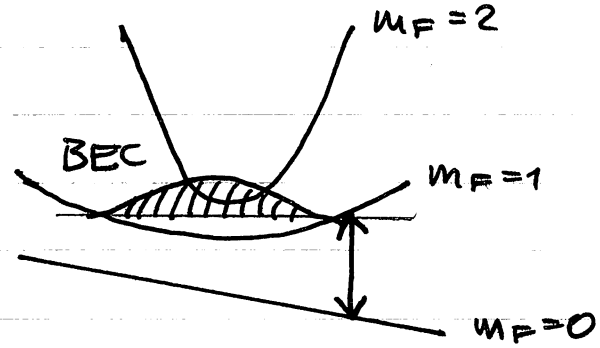
Yale (Kasevich)

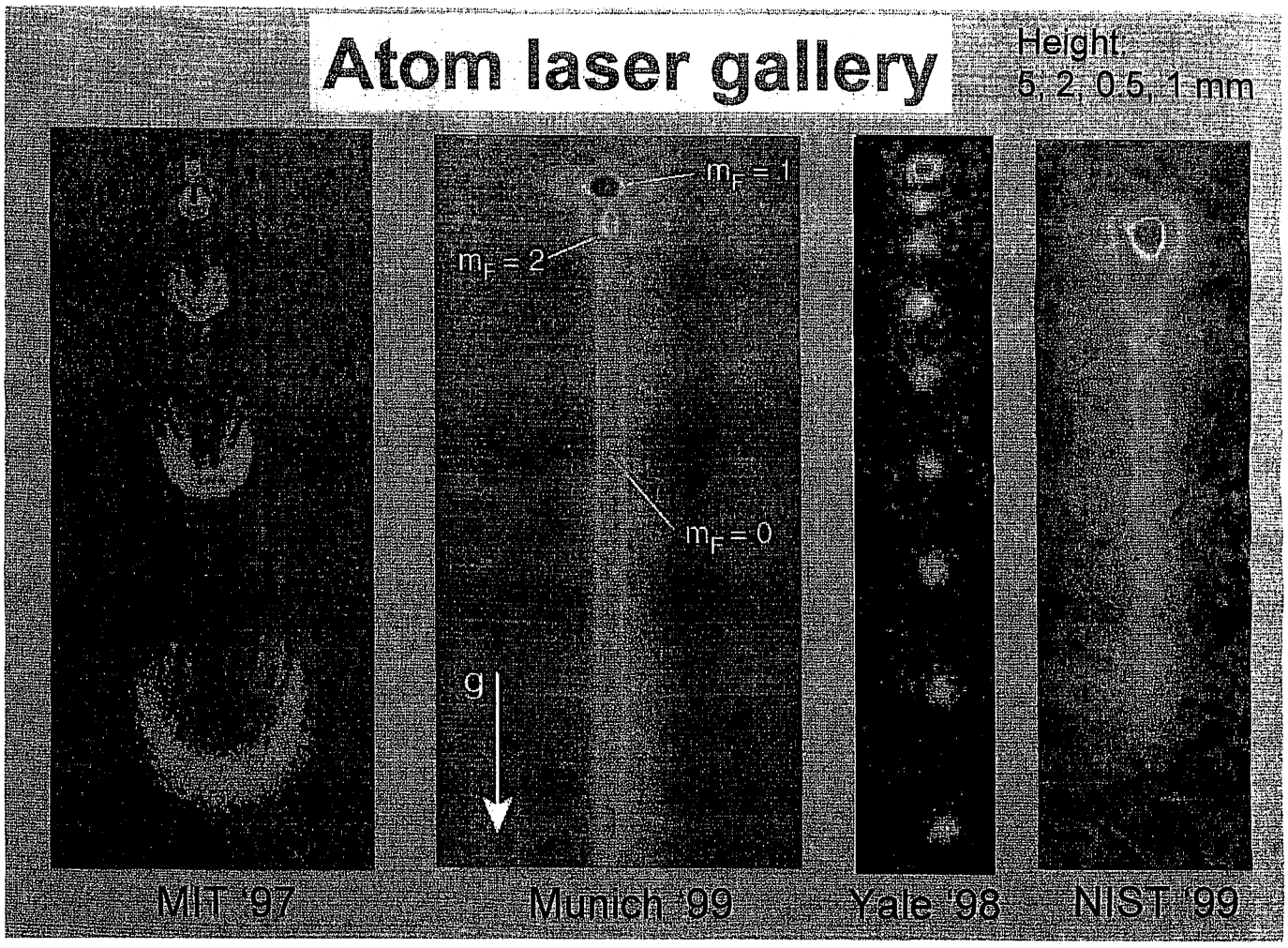


periodisches Potential (Lasarstehwellen-feld)

gepulster Atomlaser

München (Hänsch)



magnet. Falle
CW RF-Feld

CW Atomlaser