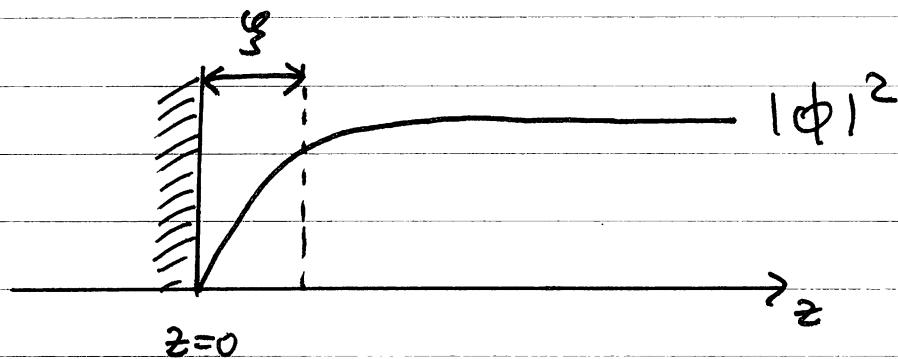
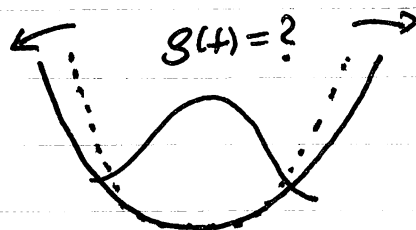




Wechselwirkungen führen dazu, daß Defekte nur eine endliche Reichweite der Wirkung zeigen. Im Gegensatz dazu hat die Schrödingergleichung eines nicht wechselwirkenden Bosegas mit RB $\phi(z=0)=0$ nur oszillatorische Lösungen. D.h. selbst in großer Entfernung ist die Präsenz des Defektes spürbar.

(D) Anregungsfrequenzen kleiner Dichteoszillationen im Kondensat: zeitabhängiger Gaußansatz

Nun wollen wir untersuchen wie sich ein Kondensat verhält, wenn man zu einem Zeitpunkt das Fallenpotential plötzlich ändert. Insbesondere interessieren wir uns für die niedrigsten Anregungsfrequenzen. Die Bewegungsmoden des Kondensats mit kleinsten Anregungsfrequenzen sind sog. Atmungsmoden in denen das Kondensat seine Form beibehält jedoch mit zeitabhängigen globalen Parametern wie dem Radius der Wolke etc.



Für den Fall einer Atmungsmodi bleibt die Symmetrie von $\phi(\vec{r}, t)$ erhalten. Daher machen wir den zeitabhängigen Gaußansatz

$$(138) \quad \phi(\vec{r}, t) = \frac{e^{i\delta(t)}}{\pi^{3/4} \sqrt{\sigma_x(t)\sigma_y(t)\sigma_z(t)}} \exp \left\{ -\sum_{\alpha} \frac{x_{\alpha}^2}{2\sigma_{\alpha}^2(t)} + i \sum_{\alpha} x_{\alpha}^2 g_{\alpha}(t) \right\}$$

Einsetzen in die zeitabhängige GPGL liefert nach Einführung natürlicher Einheiten ($\epsilon_0 = \hbar\omega$, $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$) sowie weiteren Umformungen die gewöhnlichen DGL

$$(139) \quad \ddot{\sigma}_{\alpha} + \nu_{\alpha}^2 \sigma_{\alpha} = \frac{1}{\sigma_{\alpha}^3} + \frac{\kappa}{\sigma_x \sigma_y \sigma_z}$$

sowie

$$(140) \quad g_{\alpha}(t) = - \frac{m \dot{\sigma}_{\alpha}(t)}{2\hbar \sigma_{\alpha}(t)}$$

wobei $\nu_{\alpha} \equiv \omega_{\alpha} / \bar{\omega}$, $\bar{\omega} = \sqrt[3]{\omega_x \omega_y \omega_z}$

Um das lineare Antwortverhalten des Kondensats für kleine Störungen zu studieren, linearisiert man Gl. (139) um die stationäre Lösung

$$(141) \quad \sigma_{\alpha}(t) = \sigma_{\alpha}^S + \delta \sigma_{\alpha}(t)$$

Vernachlässigung nichtlinearer Terme in δG_α liefert ($\alpha = 1, 2, 3$)

$$(142) \quad \delta G_\alpha'' = \left(-\nu_\alpha^2 + \frac{3}{G_\alpha^s} - \frac{\kappa}{G_x^s G_y^s G_z^s} \right) \delta G_\alpha - \frac{\kappa}{G_\alpha^s G_x^s G_y^s G_z^s} (\delta G_x + \delta G_y + \delta G_z)$$

Diagonalisierung des linearen DGL-Systems liefert die linearen Anregungsfrequenzen

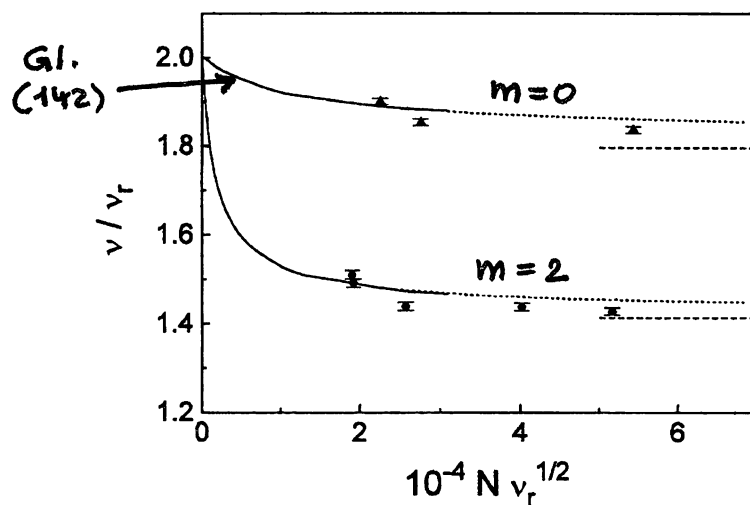


FIG. 3. We measure the frequency of the $m = 0$ (triangles) and $m = 2$ (circles) condensate modes as a function of interaction strength. The relative interaction strength in the condensate varies as the product of number of atoms, N , and the square root of the radial trap frequency, ν_r . Solid lines show the mean-field calculation by Edwards and co-workers [9], dotted lines show the results of similar calculations by Esry and Greene [10], and dashed lines show the prediction by Stringari for the strongly interacting limit [11].

exp. Daten

D.S. Jin et al.

Phys. Rev. Lett. 77

(1996) 420

(E) Die zeitabhängige GPGL im Grenzfall starker Wechselwirkungen: hydrodynamische Beschreibung

Zur Beschreibung zeitabhängiger Phänomene im Grenzfall starker Wechselwirkungen ist die Thomas-Fermi Approximation sicher nicht sinnvoll, da bei ihr die kinetische Energie und somit die Bewegung der Atome vernachlässigt wird. Eine Verallgemeinerung der TF-Näherung auf dynamische Probleme gelingt jedoch über einen hydrodynamischen Zugang. Dazu teilen wir die Kondensatwellenfunktion in Amplitude und Phase auf

$$(143) \quad \sqrt{N_0} \phi(\vec{r}, t) = \sqrt{S(\vec{r}, t)} e^{i \frac{S(\vec{r}, t)}{\hbar}}$$

Einsetzen in die GPGL (103) liefert

$$(144) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + V_{\text{trap}} + g S(\vec{r}, t) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{S}} \Delta S$$

sowie

$$(145) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{S(\vec{r}, t)}{m} \vec{\nabla} S \right] = 0$$

Die zweite Gleichung ist nichts anderes als die Kontinuitätsgleichung für die Kondensatdichte

$$(146) \quad \boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0} \quad \vec{j} = S \frac{\vec{\nabla} S}{m} = \frac{\hbar}{2im} (\phi^* \nabla \phi - \text{c.c.})$$

Führt man ein lokales Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$ gemäß

$$(147) \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = g(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$$

d.h.

$$(148) \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{\nabla} S}{m}$$

ein, kann (144) in der Form (nach Anwendung von $\vec{\nabla}$)

$$(149) \quad \boxed{m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V_{\text{trap}} + gS - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{g}}{\sqrt{g}} \right] = 0}$$

geschrieben werden. Dies ist bis auf den letzten Term die hydrodynamische Gleichung einer Flüssigkeit.

Wegen

$$(150) \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{\nabla} S}{m} = 0}$$

handelt es sich um eine rotationsfreie Flüssigkeit. Diese Eigenschaft des Bosekondensats hängt eng mit der in diesem System auftretenden Superfluidität zusammen und führt dazu, daß ein Bosekondensat nicht wie ein starrer Körper rotieren kann für den gilt

$$(151) \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$$

Die Eigenschaften von Bosekondensaten bei Rotation werden wir in einem späteren Abschnitt ausführlicher diskutieren.

Der letzte Term in Gl. (149)

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{g}}{\sqrt{g}}$$

tritt in klassischen Flüssigkeiten nicht auf und wird Quantendruck genannt (auch wenn er die Dimension einer Energie hat).

Es gilt die Abschätzung

$$(152) \quad \frac{\Delta \sqrt{g}}{\sqrt{g}} \sim \frac{1}{d^2} \quad d \text{ typische Längenskala von Fluktuationen}$$

Falls d groß gegenüber der healing length $\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}sg}$ gilt

$$(153) \quad \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{g}}{\sqrt{g}} \sim \frac{\hbar^2}{2md^2} \ll \frac{\hbar^2}{2m\xi^2} \sim sg$$

d.h. der Quantendruck kann gegenüber dem mean-field Potential sg vernachlässigt werden. Das liefert eine klassische Flüssigkeit mit mean-field Potential

$$(154) \quad \boxed{m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} m v^2 + V_{\text{trap}} + g\phi \right] = 0}$$

$d \gg \xi$ d.h. starke WW

Nun wollen wir die Gl. (154) und (146) benutzen, um die hydrodynamische Expansion eines Bose-kondensats nach plötzlichem Abschalten des Fallenpotentials zu beschreiben. Ausgangspunkt ist der stationäre Zustand mit Fallenpotential, d.h.

$$(155) \quad V_{\text{trap}} + g\phi_{\text{ss}}(\vec{r}) = \text{konst}$$

Das entspricht natürlich gerade der Thomas-Fermi

Lösung, wenn man konst. $= \mu$ setzt. Das Ausschalten des Potentials beschreiben wir durch zeitabhängige Fallfrequenzen

$$(156) \quad V(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 m \omega_{\alpha}^2(t) x_{\alpha}^2$$

Da $\vec{\nabla} V$ und $\vec{\nabla} g_{ss}$ linear in $\vec{r}$ sind machen wir einen Skalenansatz

$$(157) \quad g(\vec{r}, t) = \frac{1}{\lambda_x(t) \lambda_y(t) \lambda_z(t)} g\left(\frac{x_{\alpha}}{\lambda_{\alpha}(t)}, t=0\right)$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} = \frac{d}{dt}$$

folgt aus (146)

$$(158) \quad \frac{d}{dt} g + g \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \frac{d}{dt} \ln g = - \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

Weiterhin ergibt sich mit

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = m (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

aus (154) und (158)

$$(159) \quad \frac{d^2}{dt^2} \ln g = - \Delta \left(\frac{V_{\text{trap}}}{m} + \frac{g g}{m} \right)$$

Das liefert schließlich

$$(160) \quad \frac{d^2}{dt^2} \lambda_\alpha(t) = -\omega_\alpha^2(t) \lambda_\alpha(t) + \frac{\omega_\alpha^2(0)}{\lambda_\alpha \lambda_x \lambda_y \lambda_z}$$

Wenn das Fallenpotential bei $t=0$ komplett abgeschaltet wird, d.h. $\omega_\alpha(t) \equiv 0$ für $t > 0$ folgt

$$(161) \quad \frac{d^2}{dt^2} \lambda_\alpha(t) = \frac{\omega_\alpha^2(0)}{\lambda_\alpha(t) \lambda_x(t) \lambda_y(t) \lambda_z(t)}$$

Gl. (161) Skalengleichungen für hydrodynamische Expansion ($d \gg \xi$)

Glgen (161) können i.A. nur numerisch gelöst werden. Die Ergebnisse stimmen gut mit dem Experiment überein. Es muß aber berücksichtigt werden, daß während der Expansion die Dichte und damit der Wechselwirkungsterm $g\beta$ abnehmen. Ab einem bestimmten Zeitpunkt ist dann die Annahme einer starken Wechselwirkung, $d \gg \xi$ nicht mehr gerechtfertigt und man kommt in den Bereich der stoßfreien, d.h. ballistischen Expansion, deren Skalenverhalten der freien Schrödingergleichung statt Gl. (161) folgt.

(F) Spezielle zeitabhängige Lösungen der GPGL in 1-D: Dunkel- und Hellsolitonen

In einer räumlichen Dimension und $V_{\text{pot}} = \text{const.}$ ist die zeitabhängige GPGL (nichtlineare Schrödingergleichung) integrabel. Es existieren exakte Lösungen bestimmter Anfangswert- bzw. Randwertprobleme.

Ein quasi 1dimensionales Regime für Bosekondensate kann in stark anisotropen Fällen mit

$$(162) \quad \omega_z \ll \omega_x = \omega_y = \omega_r$$

erzielt werden. Wenn alle relevanten Energien klein gegenüber $\hbar \omega_r$ sind, d.h. wenn

$$(163) \quad k_B T, E_{\text{kin}}^0, g S_{\text{max}} \ll \hbar \omega_r$$

ist nur der niedrigste Zustand der radialen Oszillation relevant

$$(164) \quad \phi(\vec{r}, t) = \varphi(z, t) \phi_0(R)$$

Geht man mit diesem Ansatz in das Energiefunktional Gl. (106) ein und führt die radiale Integration aus, findet man

$$(165) \quad E_0[\varphi, \varphi^*] = N_0 \int dz \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d}{dz} \varphi \right|^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 |\varphi|^2 + \frac{1}{2} N_0 g_{1D} |\varphi|^2 \right]$$

wobei

$$(166) \quad g_{1D} = g \int dx \int dy |\phi_0(\mathbf{r})|^4$$

bedeutet. Da $\phi_0(\mathbf{r})$ der normierte Grundzustand des 2-D harmonischen Oszillators ist, findet man leicht

$$(167) \quad g_{1D} = g \frac{1}{2\pi a^2} = g \frac{m \omega_r}{2\pi \hbar} = 2 a \hbar \omega_r$$

Dem Energiefunktional ist die 1-D GPEL zugeordnet

$$(168) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi + \left(\frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 + N_0 g_{1D} |\psi|^2 \right) \psi$$

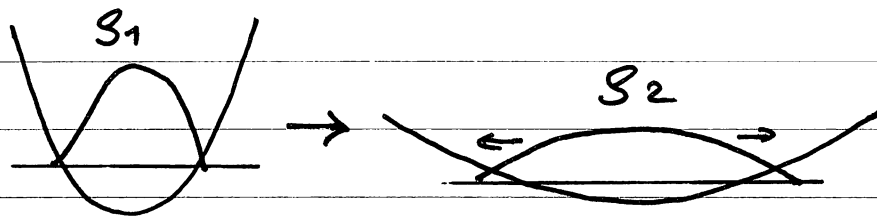
bzw im stationären Regime

$$(169) \quad \mu \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi + \left(\frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 + N_0 g_{1D} |\psi|^2 \right) \psi$$

Stationäre Solitonenlösungen

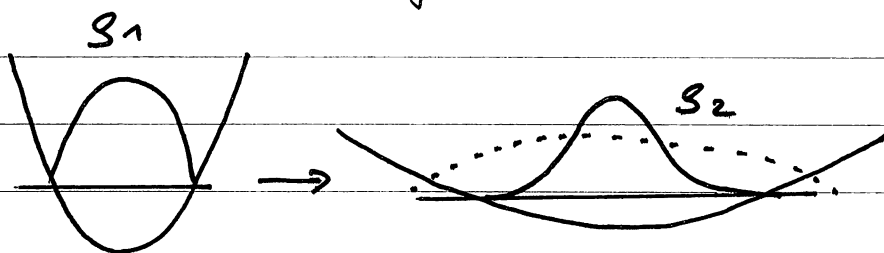
Betrachten wir ein stationäres Kondensat in einer 1-D Falle. Bei Verengung von ω_z (Öffnung der longitudinalen Falle) wird bei repulsiver Wechselwirkung, d.h. $g > 0$ das Kondensat der Bewegung des Potentials folgen

$$g > 0$$



Nicht so jedoch bei attraktiver Wechselwirkung.
Hier entwickelt sich das Kondensat in eine räumlich lokalisierte Dichteverteilung

$$g < 0$$



Man findet, daß die Lösungen minimaler Energie von (165) in diesem Fall gegeben sind durch

$$(170) \quad \psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\ell}} \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\ell}\right) \quad g < 0$$

wobei

$$(171) \quad \ell = \frac{2\hbar^2}{N_0 m |g_{10}|} = \sqrt{2} \xi$$

die Ausdehnung charakterisiert. (170) ist ein sog. stationäres Hellsoliton.

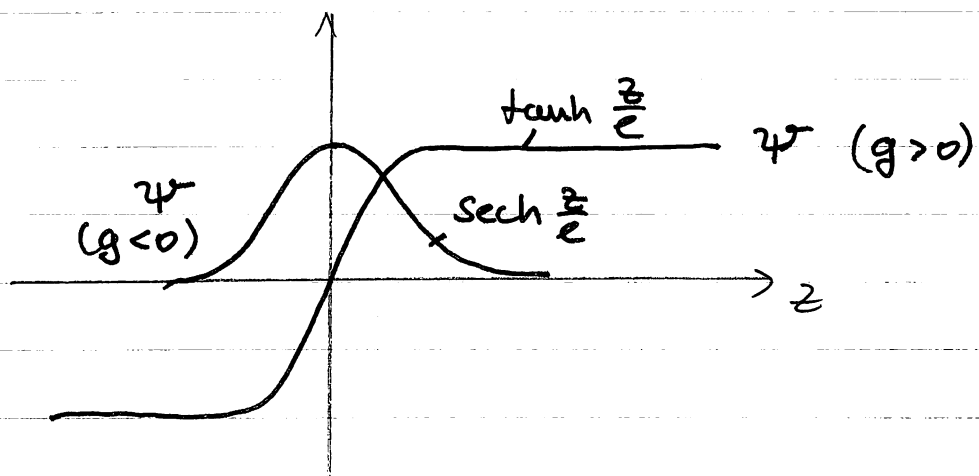
Für das entsprechende chemische Potential findet man durch Einsetzen von (170) in (169)

$$(172) \quad \mu = -\frac{1}{2} \frac{N_0^2 m |g_{10}|^2}{\hbar^2} = -\frac{1}{2} |g_{10}| g(0) < 0$$

Für repulsive Wechselwirkungen gibt es ebenfalls stationäre lokalisierte Lösungen. Diese entstehen allerdings nicht aus dem Kondensat durch einfaches Öffnen der Falle. Beispielsweise ist

$$(173) \quad \boxed{\psi(z) = \sqrt{\frac{g_0}{N_0}} \tanh\left(\frac{z}{\ell}\right)} \quad g > 0$$

eine Lösung mit einem Phasensprung bei $z=0$.
 (173) ist ein stationäres Dunkelsoliton.



Um ein dunkles Soliton zu erzeugen muß man die Phase des 1-D Kondensats an einer Stelle um π ändern.

dynamische Solitonenlösungen

Für beide Fälle $g < 0$ und $g > 0$ gibt es dynamische Solitonenlösungen.

Für $g > 0$ findet man z.B.

$$(174) \quad \psi = \psi(z - vt) = \sqrt{\frac{S_0}{N_0}} \times \left(i \frac{v}{c} + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tanh \left[\frac{z - vt}{\ell} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] \right)$$

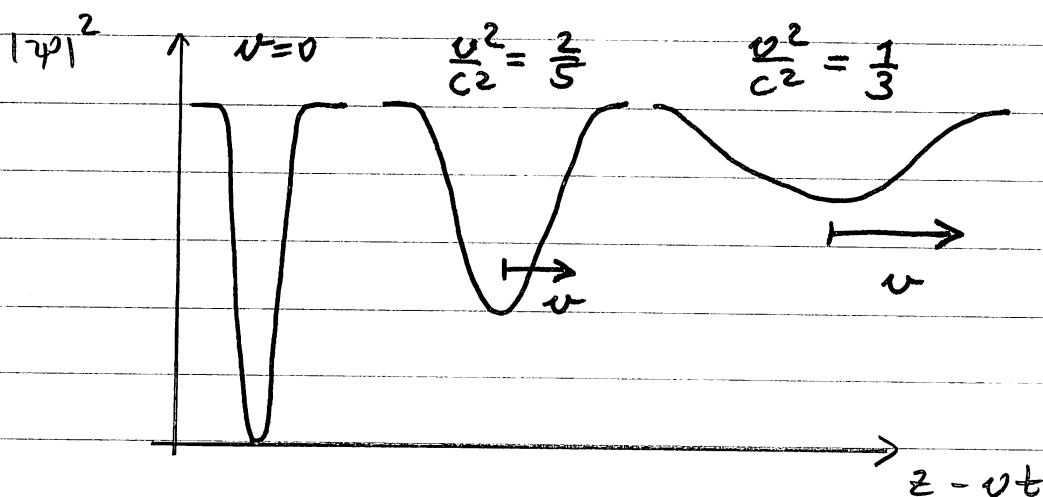
wobei v die Geschwindigkeit des Solitons bedeutet und

$$(175) \quad c = \sqrt{\frac{g_{3D} S_{3D}}{m}} = \sqrt{\frac{g_{1D} S_{1D}}{m}}$$

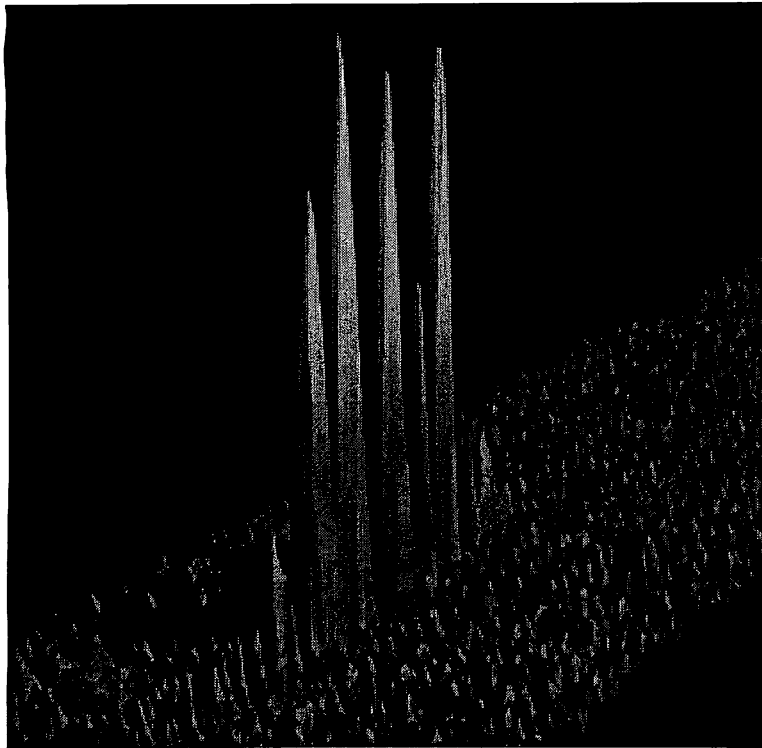
die Schallgeschwindigkeit im Kondensat darstellt. Die anschauliche Bedeutung von c wird noch später klar werden.

Man erkennt, daß die Tiefe des Dips in $|\psi|^2$ mit v/c abnimmt und seine Breite mit $\ell / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ zunimmt

$$(176) \quad |\psi(z - vt)|^2 = \frac{v^2}{c^2} \frac{S_0}{N_0} = \frac{v^2}{c^2} |\psi|_{\infty}^2$$

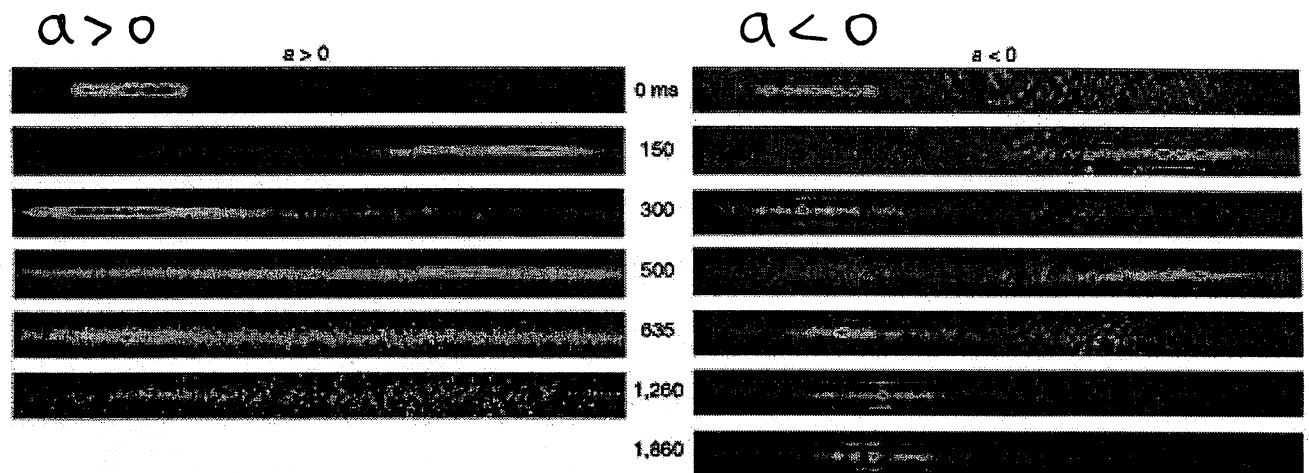


Sowohl Dunkel als auch Hell-solitonen sind experimentell beobachtet worden:



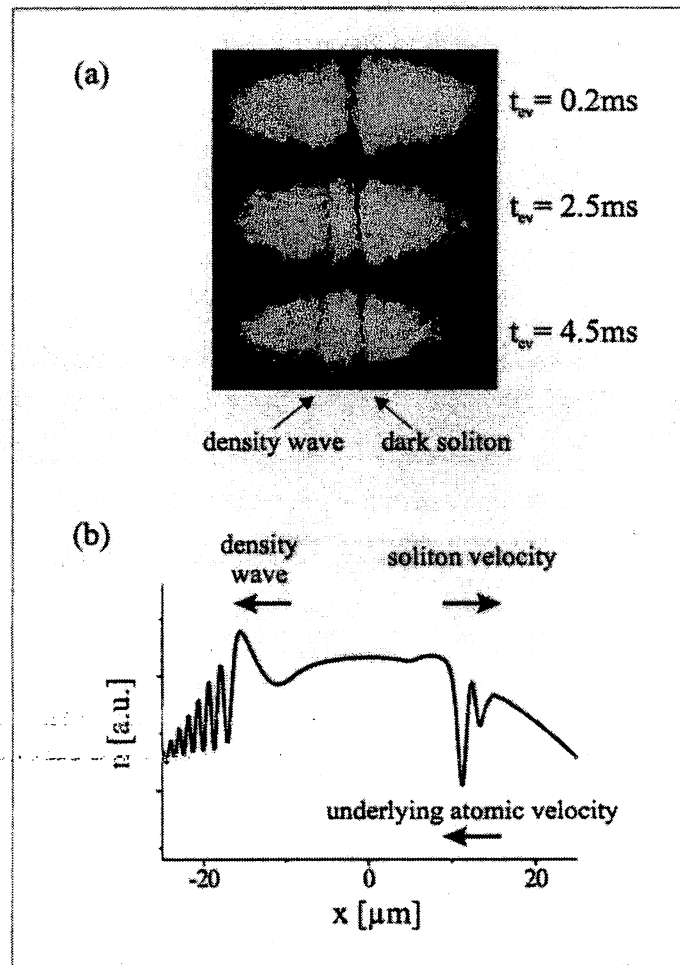
K. Strecker et al.
(R. Huglet, Rice Univ.)
Nature **417** (2002) 150

bright solitons in ^7Li



Durch Ausnutzung einer Feshbach-Resonanz kann die Streulänge mittels Magnetfeld verändert werden

dark solitons:



S. Burger et al.
 (W. Ertmer,
 Hannover)
 PRL 83 (1999)

87 12b

Bei der Diskussion der 1-D GPEL muß beachtet werden, daß der Einschluß der transversalen Bewegung nicht zu stark sein darf, da sonst die Pseudopotentialnäherung der Streuwechselwirkung nicht mehr gültig ist, d.h. es muß gelten

$$(177) \quad l_r = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_r}} > a$$

wobei a die 3-D Streuwellenlänge ist.