

5. Eigenschaften des Kondensats für $T \ll T_c$: Gross-Pitaevski Gleichung

Für Temperaturen weit unterhalb der kritischen Temperatur wollen wir annehmen, daß ein makroskopisch beschriebener Kondensatzustand mit Einteilchenwellenfunktion $\varphi(\vec{r})$ existiert. Dieses bricht die $U(1)$ Symmetrie von (96) und entspricht der Ersetzung

$$(102) \quad \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \rightarrow \varphi(\vec{r}, t) \sqrt{N_0}$$

in den Heisenberg-Bewegungsgleichungen von $\hat{\Psi}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{trap}} + g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \right] \hat{\Psi}$$

↓

$$(103) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{trap}} + g N_0 |\varphi|^2 \right) \varphi$$

wobei $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ bedeutet (Faktor 2 wegen $\hat{\Psi}^{\dagger 2}$).

Gleichung (103) hat die Form einer nichtlinearen Schrödingergleichung und heißt zeitabhängige Gross-Pitaevski Gleichung.

Die Grundzustandswellenfunktion im großkanonischen Ensemble ergibt sich aus ($T \rightarrow 0 \hat{=} \beta \rightarrow \infty$)

$$(104) \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{-\beta(\hat{H} - \mu N)}$$

D.h. $\hat{H} - \mu N = 0$

$$(105) \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{trap}} + g N_0 |\phi_0|^2 \right) \phi_0 = \mu \phi_0$$

Dies ist die zeitunabhängige Gross-Pitaevski Gleichung

Die GPGL läßt sich auf verschiedene andere Arten ableiten.
Im Rahmen der Dichtefunktionaltheorie ergibt sie sich
z.B. als Extremum des Energiefunctionals mit NB $\int |\phi|^2 dV = 1$

$$(106) \quad E[\phi, \phi^*] = N_0 \int d^3r \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla} \phi|^2 + V_{\text{trap}} |\phi|^2 + \frac{1}{2} N_0 g |\phi|^4 \right]$$

Wir wollen uns jetzt mit einigen Methoden der näherungsweise analytischen Lösung der GPGL befassen.

(A) Grauß-Ansatz für die stationäre Kondensatwellenfunktion

Für die stationäre GPGL in einem isothermen, harmonischen Potential machen wir den Ansatz

$$(107) \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4} \sigma^{3/2}} e^{-r^2/2\sigma^2}$$

mit σ als einzigem Parameter. Setzen wir diesen in das Energiefunktional (106) ein, ergibt sich

$$(108) \quad \mathcal{E} = \frac{E[\phi, \phi^*]}{N_0} = \frac{\overset{\text{kinet. E.}}{3\hbar^2}}{4m\sigma^2} + \frac{\overset{\text{pot. E.}}{3}}{4} m\omega_G^2 \sigma^2 + \frac{\hbar^2 N_0 a}{m\sigma^3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{WW-Energie}$$

Führen wir dimensionslose Größen ein mittels der Oszillatorlänge l_0 und -energie $\mathcal{E}_0$

$$(109) \quad l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad \mathcal{E}_0 = \hbar\omega$$

reduziert sich (108) auf

$$(110) \quad \boxed{\tilde{\mathcal{E}} = \frac{3}{4} \left[\frac{1}{\tilde{\sigma}^2} + \tilde{\sigma}^2 \right] + \frac{\chi}{2\tilde{\sigma}^3}}$$

wobei

$$(111) \quad \chi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N_0 a}{\sqrt{\hbar/m\omega}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N_0}{\ell_0} a$$

→

den Effekt der Wechselwirkung charakterisiert.

$\chi \ll 1$.. schwache WW

$\chi \gg 1$.. starke WW

(i) $a > 0$.. positive s-Wellenstreuung

Extremum von (110)

$$(112) \quad \frac{d\tilde{\epsilon}}{d\tilde{\gamma}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\gamma}_0^5 = \tilde{\gamma}_0 + \chi$$

$$\chi \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{\gamma}_0 \simeq 1} \quad (113)$$

Kondensatwellenfunktion identisch zu Grundzustandswellenfunktion der Falle.

$$\chi \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{\gamma}_0 \simeq \chi^{1/5} \sim N_0^{1/5}} \quad (114)$$

In diesem Fall findet man aus (110) daß der Beitrag der kinetischen Energie gegenüber dem der potentiellen Energie vernachlässigbar ist

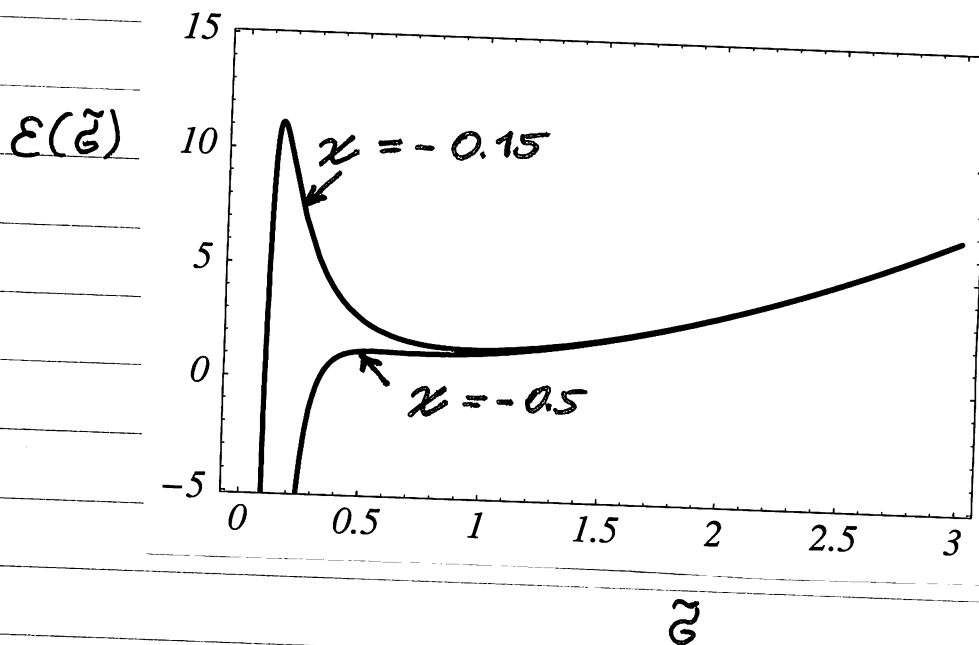
$$(115) \quad \frac{E_{kin}}{E_{pot}} = \frac{\frac{3}{4} \tilde{\gamma}^2}{\frac{3}{4} \tilde{\gamma}^2} = \frac{1}{\tilde{\gamma}^4} \simeq \frac{1}{\chi^{4/5}} \ll 1$$

D.h. wir halten fest, daß im Bereich starker Wechselwirkungen ($\chi \gg 1$) die kinetische Energie vernachlässigbar ist. Wir werden davon gleich noch Gebrauch

machen. Zunächst diskutieren wir aber den Fall

(ii) $a < 0$ negative s-Wellenstreuung

In diesem Fall hat $\tilde{\epsilon}$ als Funktion entweder kein Extremum oder mehrere, je nach der Größe von $|\chi|$.



Man erkennt, daß kein globales Minimum existiert mit $\phi \neq 0$. Ein Bosekondensat mit attraktiver Wechselwirkung ist im strengen Sinne instabil. Ein lokales Minimum, d.h. ein metastabiler Zustand existiert solange

$$(116) \quad \chi > \chi_{\text{krit}} = -\frac{4}{5^{5/4}} \approx -0.5355$$

Mit (111) kann diese Relation in eine Bedingung an die Teilchenzahl umgeschrieben werden:

(117)

$$N_0 < N_0^{\text{krit}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{1}{|a|} |\chi_{\text{krit}}|$$

bzw.

(118)

$$\frac{N_0^{\text{krit}} |a|}{\sqrt{\hbar/m\omega}} \simeq -0.57$$

Die Existenz einer oberen kritischen Teilchenzahl in Kondensaten mit attraktiver Wechselwirkung ($a < 0$) ist experimentell in ^7Li beobachtet worden (R. Hulet (1995)).

(B) Thomas-Fermi Näherung für den Grenzfall starker Wechselwirkung $\chi \gg 1$

Wir hatten eben festgestellt, daß im Grenzfall starker Wechselwirkung die kinetische Energie des Kondensats vernachlässigbar ist. D.h. wenn wir nicht am dynamischen Verhalten des Kondensats interessiert sind, können wir die kinetische Energie $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$ in der GPGL vernachlässigen. Dies liefert die einfache algebraische Gleichung

$$(119) \quad (\mu - V_{\text{trap}}(\vec{r})) \phi(\vec{r}) = g N_0 |\phi(\vec{r})|^2 \phi(\vec{r})$$

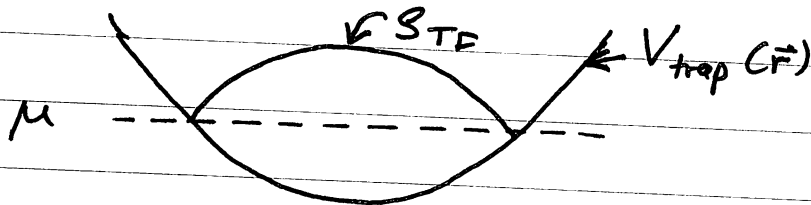
die für die Dichte des Kondensats liefert:

(120)

$$S_{\text{TF}}(\vec{r}) = N_0 |\phi_{\text{TF}}(\vec{r})|^2 = \frac{\mu - V_{\text{trap}}(\vec{r})}{g}$$

Thomas-Fermi Näherung

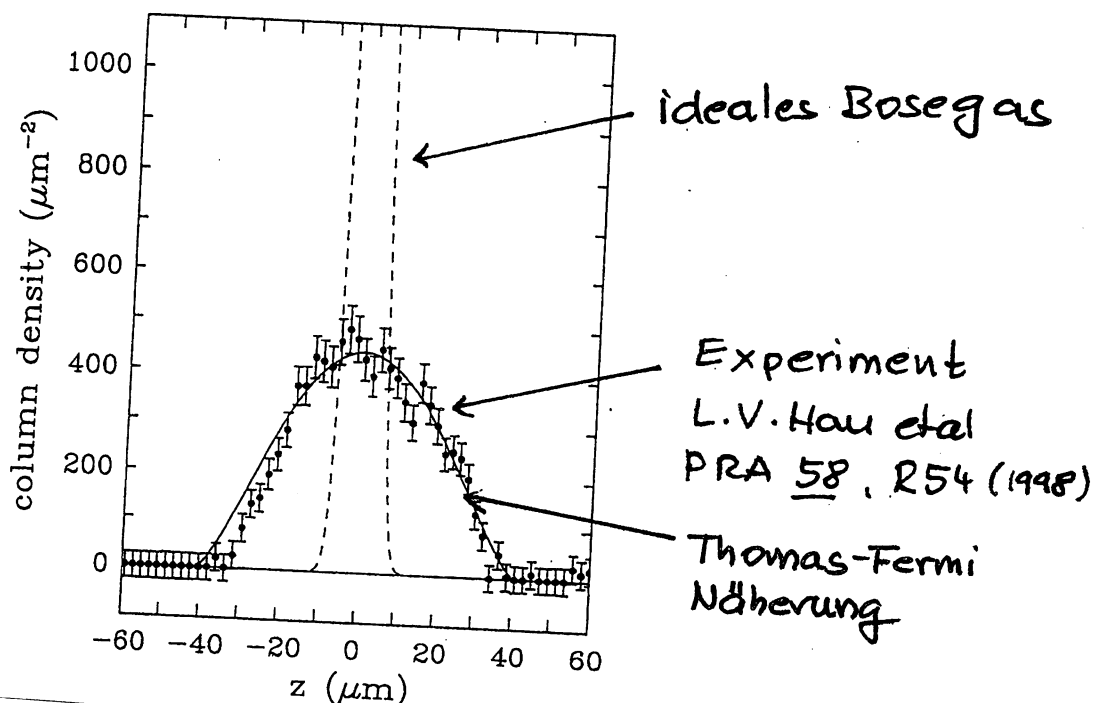
In der Thomas-Fermi Näherung (kurz TF Näherung) ist die Kondensatdichte im Wesentlichen das gespiegelte Fallenpotential



Die Thomas-Fermi Näherung muß an den Rändern des Kondensats versagen, da dort sicher

$$\left| \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} \phi_{\text{TF}}(z) \right| \gg \left| (V_{\text{trap}} - \mu) \phi_{\text{TF}}(z) \right| \rightarrow 0$$

D.h. in einer Randzone deren Größenordnung noch zu bestimmen bleibt ist die TF Näherung sicher falsch, ansonsten ist sie aber eine gute Approximation:



Für den Spezialfall einer isotropen harmonischen Falle

$$(121) \quad V = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2)$$

findet man für $r \leq R_{TF}$ für die TF Wellenfunktion

$$(122) \quad \boxed{\phi_{TF}(\vec{r}) = \left(\frac{\mu}{N_0 q} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{r^2}{R_{TF}^2} \right)^{1/2}}$$

d.h. die Wurzel aus einer Parabel. Hierbei ist der Thomas-Fermi Radius R_{TF} aus

$$(123) \quad V = \frac{1}{2} m \omega^2 R_{TF}^2 = \mu$$

bestimmt

$$(124) \quad \boxed{R_{TF} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}}$$

Die Relation zwischen chemischen Potential μ und Teilchenzahl N_0 ergibt sich aus der Normierungsbedingung

$$(125) \quad \int_0^R dr \, 4\pi r^2 |\phi_{TF}(r)|^2 \stackrel{!}{=} 1$$

Dies liefert schließlich

$$(126) \quad \boxed{\mu = \frac{1}{2} \hbar \omega \left[\frac{15 N_0 q}{(\hbar/m\omega)^{3/2}} \right]^{2/5} = \frac{1}{2} \hbar \omega \left[\frac{15 N_0 q}{\ell_0} \right]^{2/5}}$$

Der Term in der Klammer ist bis auf numerische Vorfaktoren der dimensionslose Wechselwirkungsparameter χ . D.h.

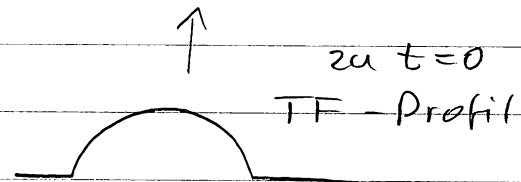
$$(127) \quad \chi \gg 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu \gg \hbar \omega$$

Die Energie pro Teilchen ist im Regime starker WW viel größer als die Fallenenergie.

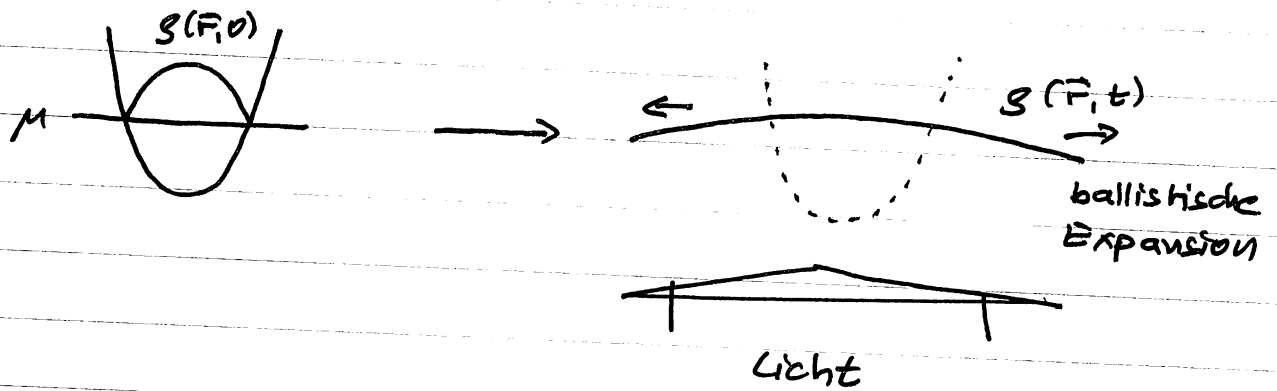
Experimentell wird die Dichteverteilung im Kondensat durch "absorption imaging" bestimmt. Da die typische Ausdehnung eines Kondensats jedoch im Bereich von $100 \mu\text{m}$ liegt und daher sehr klein ist, wird zunächst das Fallenpotential abgeschaltet. Aufgrund des dichteabhängigen Terms in der zeitabhängigen GPGL kommt es anfänglich zu einer raschen Expansion. Das expandierte Gas läßt sich dann mittels absorption imaging leicht abbilden.

$$V_{\text{trap}} \rightarrow 0$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + g N_0 |\phi|^2 \right) \phi$$



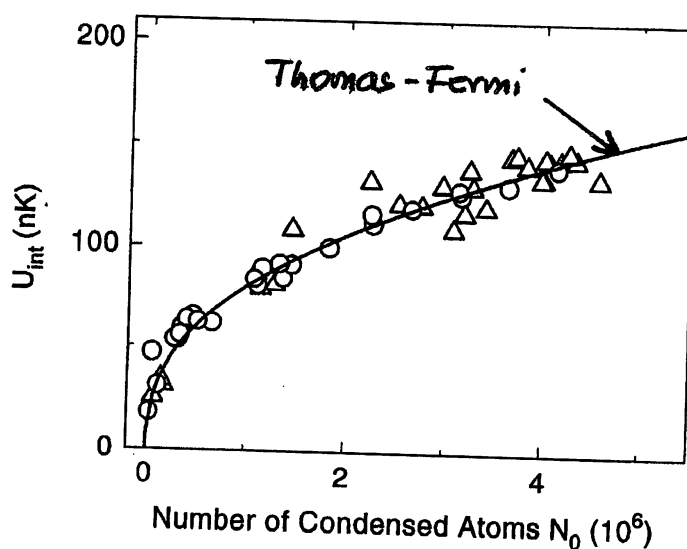
Wirkt wie abstoßendes Potential



Nach abruptem Abschalten der Falle hat das Kondensat zunächst nur die Wechselwirkungsenergie die bei der Expansion vollständig in kinetische Energie umgewandelt wird. Durch zeitabhängige Absorptionsmessungen nach der Umwandlungsphase kann dann die kinetische Energie und damit die WW Energie vor Abschalten der Falle gemessen werden.

vor Abschalten

$$(128) \quad E_{WW} = N_0^2 g \int d^3 \vec{r} \frac{1}{2} |\phi_{TF}|^4 \simeq \frac{2}{7} N_0 \mu \sim N_0^{7/5}$$



W. Ketterle

et al.

Phys. Rev. Lett. 77

(1996) 4

FIG. 3. Mean-field energy per condensed atom versus the number of atoms in the condensate. Δ : clouds with no visible normal fraction. $\circ$: clouds with both normal and condensed fractions visible. The solid line is a fit proportional to $N_0^{2/5}$.

Für die Gesamtenergie vor Abschalten der Falle findet man

$$(129) \quad E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

$$(130) \quad E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m \omega^2 N_0 \int d^3 r |\phi_{\text{TF}}(r)|^2 r^2 \simeq \frac{3}{7} N_0 \mu$$

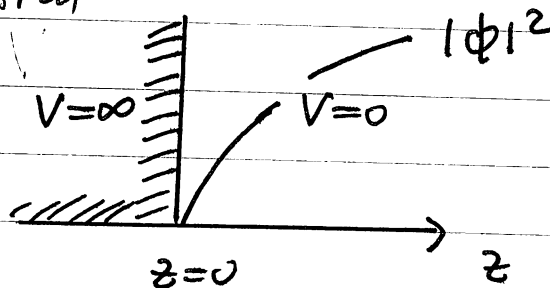
$$(131) \quad \boxed{E_{\text{tot}} \simeq \frac{5}{7} N_0 \mu \neq N_0 \mu} \quad \sim N_0^{7/5}$$

Aufgrund der Wechselwirkung wächst die Gesamtenergie nichtlinear mit der Teilchenzahl und

$$(132) \quad \mu = \frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial N_0} \neq \frac{E_{\text{tot}}}{N_0}$$

(c) homogenes Kondensat mit ∞ Potentialstufe und "healing length"

Wir wollen jetzt die Lösung der stationären GPGL für eine unendlich hohe Potentialstufe bei $z=0$ betrachten



Zu lösen ist die nichtlineare DGL in 1-D:

$$(133) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + N_0 g |\phi|^2 \right) \phi = \mu \phi \quad z \geq 0$$

mit Randbedingung

$$(134) \quad \phi(z=0) = 0$$

$$\text{Für } z \rightarrow \infty : \frac{d^2}{dz^2} \rightarrow 0$$

$$(135) \quad g = N_0 |\phi|^2 \rightarrow \frac{\mu}{g} = g_{\max}$$

Gl. (133) wird durch

$$(136) \quad \phi(z) = \sqrt{\frac{g_{\max}}{N_0}} \tanh\left(\frac{z}{\sqrt{2}\xi}\right) \quad z \geq 0$$

gelöst, wobei

$$(137) \quad \boxed{\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m g_{\max} g}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m \mu}}}$$

die sogenannte healing length bezeichnet

Die healing length charakterisiert die physikalische Längenskala über der sich Defekte in einem wechselwirkenden Bosekondensat bemerkbar machen. Für $a \rightarrow 0$ ($g \rightarrow 0$) geht $\xi \rightarrow \infty$. Umgekehrt geht $\xi \rightarrow 0$ für $a \rightarrow \infty$.