

1. zweite Quantisierung des Schrödingerfeldes

1.1. Systeme identischer Teilchen

Heisenbergsche Unschärfe $\Rightarrow$ "Bahnen" mikroskopischer Teilchen in Wechselwirkungsprozessen nicht mehr verfolgbar

Identische Quantenteilchen müssen als ununterscheidbar angesehen werden. Erwartungswerte von Observablen dürfen sich daher bei Vertauschen zweier Teilchen nicht ändern

$$(1)^* \quad \int dx^N \psi^*(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_N) \hat{B} \psi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_N) \\ = \int dx^N \psi^*(x_1, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_N) \hat{B} \psi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_N)$$

wobei $x \equiv (\vec{r}, s)$ Orb- und Spinfreiheitsgrade zusammenfaßt. D.h. es dürfen nur solche Wellenfunktionen zugelassen werden, die (1) für alle Observablen erfüllen

Bezeichne $\hat{P}_{jk}$ den Permutationsoperator zwischen Teilchen j und k

$$(2) \quad \hat{P}_{jk} \psi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_N) = \psi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_N)$$

* Gleichungsnummerierung in jedem Kapitel neu

so gilt:

(3)

$$\hat{P}_{jn}^2 = 1$$

$$\hat{P}_{jn}^{-1} = \hat{P}_{jn}$$

Gl. (1) impliziert

$$(4) \quad \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_{jn}^+ \hat{B} \hat{P}_{jn} | \psi \rangle \quad \forall j, k$$

$$\text{mit } \langle \phi | \hat{B} | \psi \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \langle \phi + \psi | \hat{B} | \phi + \psi \rangle - \langle \phi - \psi | \hat{B} | \phi - \psi \rangle - i \langle \phi + i\psi | \hat{B} | \phi + i\psi \rangle + i \langle \phi - i\psi | \hat{B} | \phi - i\psi \rangle \right\}$$

folgt auch

$$(5) \quad \langle \phi | \hat{B} | \psi \rangle = \langle \phi | \hat{P}_{jn}^+ \hat{B} \hat{P}_{jn} | \psi \rangle$$

d.h.

$$(6) \quad \hat{B} = \hat{P}_{jn}^+ \hat{B} \hat{P}_{jn}$$

im Hilbertraum der zugelassenen Wellenfunktionen. Für $\hat{B} = \mathbb{I}$ hat man

(7)

$$\hat{P}_{jn}^{-1} = \hat{P}_{jn} = \hat{P}_{jn}^+$$

mit den Eigenwerten

(8)

$$\lambda = \pm 1$$

Aus (6) folgt weiterhin

(9)

$$[\hat{B}, \hat{P}_{jn}] = 0$$

unabhängig

$$[\hat{H}, \hat{P}_{jn}] = 0$$

D.h. jede Lösung der Schrödingergleichung im Raum der zugelassenen Wellenfunktionen ist simultane Eigenfunktion von $\hat{H}$ und allen $\hat{P}_{jk}$. Dabei sind die Eigenwerte aller $\hat{P}_{jk}$ gleich, denn

$$(10) \quad \hat{P}_{jk} = \hat{P}_{1j} \hat{P}_{2k} \hat{P}_{12} \hat{P}_{2k} \hat{P}_{1j}$$

d.h.,

$$(11) \quad \hat{P}_{jk} |\psi\rangle = (\lambda_{1j})^2 (\lambda_{2k})^2 \lambda_{12} |\psi\rangle$$

Definition:

Eine Vielteilchenwellenfunktion $\psi(x_1, \dots, x_N)$ (Diraczustand $|\psi\rangle$) heißt:

$$\text{symmetrisch} \iff \hat{P}_{jk} \psi_S = + \psi_S \quad \forall jk$$

$$\text{antisymmetrisch} \iff \hat{P}_{jk} \psi_A = - \psi_A \quad \forall jk$$

Die Menge aller möglichen Permutationsoperatoren

$$(12) \quad \hat{P} = \prod \hat{P}_{jk}$$

bilden eine (nichtabelsche) Gruppe, die Permutationsgruppe. S_N mit der Hintereinanderausführung als Gruppenoperation.

Für $\hat{P} \in S_N$ gilt

$$(13) \quad \boxed{\hat{P} \psi_S = \psi_S} \quad \boxed{\hat{P} \psi_A = \text{sgn}(P) \psi_A}$$

wobei $\text{sgn}(P) = +1$ falls P aus gerader Anzahl elementarer Permutationen P_{jk} und $\text{sgn}(P) = -1$ gilt falls P aus einer ungeraden Anzahl zusammengesetzt ist.

Der Raum der symmetrischen Wellenfunktionen ist orthogonal zum Raum der antisymmetrischen Wellenfunktionen, da

$$\langle \psi_A | \psi_S \rangle = \langle \psi_A | \hat{P}_{jk} | \psi_S \rangle = \langle \psi_A | \hat{P}_{jn}^+ | \psi_S \rangle = - \langle \psi_A | \psi_S \rangle$$

Symmetriepostulat

Der Hilbertraum der Zustände identischer Teilchen enthält entweder nur symmetrische (Bosonen) oder nur antisymmetrische (Fermionen) Funktionen

Spin-Statistik Theorem (W. Pauli Phys. Rev. 58, 716 (1940))

Bosonen haben ganzzahligen Spin, Fermionen halbzahligen

Bei der Definition von ψ_S und ψ_A haben wir angenommen, daß gemeinsame Eigenfunktionen zu allen $\hat{P}_{jn}$ existieren. Da die $\hat{P}_{jn}$ nicht kommutieren ist dies nicht klar. Wir werden jetzt durch explizite Konstruktion die Existenz dieser beweisen. Seien

$$(14) \quad \boxed{\vec{S} = \sum_{P \in S_N} \hat{P}} \quad \text{und} \quad \boxed{\vec{A} = \sum_{P \in S_N} \text{sgn}(P) \hat{P}}$$

der Symmetrisierungs- bzw. Antisymmetrisierungs-
operator, dann gilt für jede normierbare Funktion
 $f(x_1, \dots, x_N)$ bis auf Normierung

$$(15) \quad \hat{S} f(x_1, \dots, x_N) = \psi_S(x_1, \dots, x_N)$$

$$(16) \quad \hat{A} f(x_1, \dots, x_N) = \psi_A(x_1, \dots, x_N)$$

denn:

$$\hat{P}_{jN} \hat{S} = \sum_{P \in S_N} \hat{P}_{jN} \hat{P} = \sum_{\hat{P}' \in S_N} \hat{P}' = \hat{S}$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{jN} \hat{A} &= \sum_{P \in S_N} \text{sgn}(\hat{P}) \hat{P}_{jN} \hat{P} = \sum_{P \in S_N} (-\text{sgn}(\hat{P}_{jN} \hat{P})) \hat{P}_{jN} \hat{P} \\ &= - \sum_{\hat{P}' \in S_N} \text{sgn}(\hat{P}') \hat{P}' = -\hat{A} \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel: System nicht wechselwirkender Teilchen

$$(17) \quad \hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{h}_i \quad \text{mit} \quad \hat{h}_i \equiv \hat{h}$$

Eigenfunktionen von $\hat{h}$ seien bekannt:

$$(18) \quad \hat{h} \phi_\nu(x) = \epsilon_\nu \phi_\nu(x)$$

$\Rightarrow$

$$(19) \quad f_{\nu_1, \dots, \nu_N}(x_1, \dots, x_N) = \phi_{\nu_1}(x_1) \cdots \phi_{\nu_N}(x_N)$$

$\Rightarrow$

$$(20) \quad \phi_{v_1, \dots, v_N}^{(S)}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_k n_k!}} \sum_{P \in S_N} P \phi_{v_1}(x_1) \dots \phi_{v_N}(x_N)$$

$$(21) \quad \phi_{v_1, \dots, v_N}^{(A)}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} \text{sgn}(P) P \phi_{v_1}(x_1) \dots \phi_{v_N}(x_N)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_{v_1}(x_1) & \phi_{v_1}(x_2) & \dots & \phi_{v_1}(x_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{v_N}(x_1) & \phi_{v_N}(x_2) & \dots & \phi_{v_N}(x_N) \end{vmatrix}$$

Slater Determinante

n_k ist die Anzahl der Teilchen im selben Zustand v_k

Aus (21) folgt unmittelbar das Pauli-Prinzip

$$(22) \quad \phi^{(A)} \equiv 0 \quad \begin{cases} \text{falls } v_i = v_j \text{ für ein Paar } i \neq j \\ \text{falls } x_i = x_j \end{cases} \quad -11-$$

Falls $\{\phi_v(x)\}$ einen vollständigen Satz von Wellenfunktionen im 1-Teilchen Hilbertraum bilden, sind die $\{\phi^{(S)}\}$ und $\{\phi^{(A)}\}$ vollständig im Raum der zugelassenen Vielteilchenwellenfunktionen.

1.2. zweite Quantisierung und Vielteilchenwellenfunktionen

Die Quantentheorie identischer Teilchen lässt sich formal sehr einfach in der Sprache der zweiten Quantisierung formulieren. Die zweite Quantisierung führt dabei zu keiner neuen Physik sondern ist im Wesentlichen nur eine elegante Form der Buchhaltung. Im Rahmen der Vielteilchentheorie gibt es keine Teilchenzeugung bzw. -vernichtung. Die Teilchenzahl bleibt erhalten (Superauswahlregel).

(A) Fock Raum und Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$\mathcal{H}(N)$ sei Hilbertraum von N identischen Teilchen. Dann seien $\hat{c}_n, \hat{c}_n^\dagger$ bzw. $\hat{b}_n, \hat{b}_n^\dagger$ lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \hat{b}_n, \hat{c}_n : \mathcal{H}(N) &\rightarrow \mathcal{H}(N-1) \quad \text{"Vernichter"} \\ \hat{b}_n^\dagger, \hat{c}_n^\dagger : \mathcal{H}(N) &\rightarrow \mathcal{H}(N+1) \quad \text{"Erzeuger"} \end{aligned} \quad (23)$$

mit den Eigenschaften:

Fermionen

$$\begin{aligned} \hat{c}_k \phi_{v_1 \dots v_N}^{(A)}(x_1 \dots x_N) &= 0 \quad k \notin \{v_1, \dots, v_N\} \\ \hat{c}_k \phi_{v_1 \dots v_N}^{(A)}(x_1 \dots x_N) &= (-1)^{j-1} \phi_{v_1 \dots v_{j-1} v_{j+1} \dots v_N}^{(A)} \quad k = v_j \end{aligned} \quad (24)$$

wobei die $\{\phi_{v_1 \dots v_N}^{(A)}\}$ den vollständigen Satz der Slaterdeterminanten aus nicht wechselwirkenden N Fermionen bedeutet,

Bosonen

$$(25) \quad \begin{aligned} \hat{b}_k \phi_{v_1 \dots v_N}^{(s)} &= 0 & k \notin \{v_1, \dots, v_N\} \\ \hat{b}_k \phi_{v_1 \dots v_N}^{(s)} &= \sqrt{n_k} \phi_{v_1 \dots v_{i-1} v_{i+1} \dots v_N}^{(s)} & k = v_i \end{aligned}$$

wobei n_k die Anzahl der Teilchen im selben Zustand $v_i = k$ bedeutet.

Fock-Raum

$$(26) \quad \mathcal{F} = \mathcal{H}(0) \oplus \mathcal{H}(1) \oplus \mathcal{H}(2) \oplus \dots \oplus \mathcal{H}(N) \oplus \dots$$

Bisher Ortsdarstellung des Vielteilchenzustandes

$$(27) \quad \phi_{v_1 \dots v_N}(x_1, \dots, x_N) = \langle x_1, \dots, x_N | \phi \rangle$$

oft jedoch sog. Besetzungszahldarstellung vorteilhaft

$$|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle \quad \begin{cases} n_i \in \{0, 1\} & \text{Fermionen} \\ n_i \in \mathbb{N} & \text{Bosonen} \end{cases}$$

$\nearrow$
 Anzahl der Teilchen
 in Zustand v_i

In dieser Darstellung l"o"st sich die Wirkung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren wie folgt schreiben

$$(28) \quad \hat{c}_k |n_1 \dots n_N\rangle = \underset{\text{Fermi}}{(-1)^{\sum_{j < k} n_j}} n_k |n_1, \dots, n_{k-1}, 0, n_{k+1}, \dots, n_N\rangle$$

$$(29) \quad \hat{b}_k |n_1 \dots n_N\rangle = \underset{\text{Bose}}{\sqrt{n_k}} |n_1, \dots, n_{k-1}, (n_k-1), n_{k+1}, \dots, n_N\rangle$$

In (28) kann der Vorfaktor n_k auch durch $\sqrt{n_k}$ ersetzt werden. Die Wirkung der Erzeugungsoperatoren b_k^+ und c_k^+ ergibt sich aus (27), (28) durch adjungieren

$$(30) \quad c_k^+ |n_1 \dots n_N\rangle = \underset{\text{F}}{(-1)^{\sum_{j < k} n_j}} (1-n_k) |n_1 \dots 1_k \dots n_N\rangle$$

$$(31) \quad b_k^+ |n_1 \dots n_N\rangle = \underset{\text{B}}{\sqrt{n_k+1}} |n_1 \dots (n_k+1) \dots n_N\rangle$$

Aus (30) und (31) sieht man daß alle N -Teilchenzustände durch Anwendung von Erzeugungsoperatoren aus dem Vakuum (keine Teilchen) generiert werden können

$$(32) \quad |n_1 \dots n_N\rangle = \underset{\text{Fermi}}{c_1^{+n_1} \dots c_N^{+n_N}} |0\rangle = \prod_j (c_j^+)^{n_j} |0\rangle \quad n_j \in \{0,1\}$$

$$(33) \quad |n_1 \dots n_N\rangle = \prod_j \frac{(b_j^+)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} |0\rangle \quad n_j \in \mathbb{N}$$

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren genügen den folgenden Vertauschungsregeln:

$$(34) \quad \boxed{[\hat{b}_k, \hat{b}_e] = 0 \quad [\hat{b}_k, \hat{b}_e^\dagger] = \delta_{ke}}$$

$$(35) \quad \boxed{\{\hat{c}_k, \hat{c}_e\} = 0 \quad \{\hat{c}_k, \hat{c}_e^\dagger\} = \delta_{ke}}$$

Beweis:

(i) Bosonen:

- $\hat{b}_k \hat{b}_e = \hat{b}_e \hat{b}_k$ trivial ✓
- $\hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger | \dots n_k \dots \rangle = \hat{b}_k \sqrt{n_k+1} | \dots (n_k+1) \dots \rangle$
 $= (n_k+1) | \dots n_k \dots \rangle$
- $\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k | \dots n_k \dots \rangle = \hat{b}_k^\dagger \sqrt{n_k} | \dots (n_k-1) \dots \rangle$
 $= n_k | \dots n_k \dots \rangle$

$$\Rightarrow (\hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k) | \dots n_k \dots \rangle = | \dots n_k \dots \rangle \quad \square$$

(ii) Fermionen: $\theta_e \equiv (-1)^{\sum_{j < e} n_j}$

- $\hat{c}_k \hat{c}_e | \dots n_k \dots n_e \dots \rangle = \theta_e \hat{c}_k n_e | \dots n_k \dots 0_e \dots \rangle$
 $= \theta_e \theta_k n_e n_k | \dots 0_k \dots 0_e \dots \rangle$

$$\hat{c}_e \hat{c}_k | \dots n_k \dots n_e \dots \rangle = \theta_k \hat{c}_e n_k | \dots 0_k \dots n_e \dots \rangle$$

$$= -\theta_e \theta_k n_e n_k | \dots 0_k \dots 0_e \dots \rangle$$

$$\Rightarrow (\hat{c}_e \hat{c}_k + \hat{c}_k \hat{c}_e) | \dots n_k \dots n_e \dots \rangle = 0 \quad \square$$

- $\hat{c}_k \hat{c}_k^\dagger | \dots n_k \dots \rangle = \hat{c}_k \theta_k (1-n_k) | \dots 1_k \dots \rangle$
 $= \theta_k^2 (1-n_k) | \dots 0_k \dots \rangle$

$$\begin{aligned}\hat{c}_k^+ \hat{c}_k | \dots n_k \dots \rangle &= \hat{c}_k^+ \theta_k n_k | \dots \theta_k \dots \rangle \\ &= \theta_k^2 n_k | \dots 1_k \dots \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\hat{c}_k \hat{c}_k^+ + \hat{c}_k^+ \hat{c}_k) | \dots n_k \dots \rangle &= \begin{cases} | \dots \theta_k \dots \rangle & n_k = 0 \\ | \dots 1_k \dots \rangle & n_k = 1 \end{cases} \\ &= | \dots n_k \dots \rangle \quad \square\end{aligned}$$

Darstellung von Operatoren der N-Teilchensystems in zweiter Quantisierung

Observable in einem System von N ununterscheidbaren Teilchen müssen Operatoren entsprechen, die auf alle Teilchen gleichsam wirken. Für Einteilchen-Observable gilt

$$(36) \quad \hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{h}_i \quad \hat{h}_i \equiv \hat{h}$$

D.h. für Erwartungswerte erhält man mit der Vielteilchenwellenfunktion in Orbitaldarstellung

$$\begin{aligned}(37) \quad \langle \hat{H} \rangle &= \int dx^N \psi^*(x_1 \dots x_N) \hat{H}_D \psi(x_1 \dots x_N) \\ &= \int dx^N \sum_{j=1}^N \psi^*(x_1 \dots x_N) \hat{h}_D[x_j] \psi(x_1 \dots x_N)\end{aligned}$$

Für 2-Teilchen Observable gilt entsprechend

$$(38) \quad \hat{V} = \sum_{i \neq j=1}^N \hat{v}_{ij} \quad \hat{v}_{ij} \equiv \hat{v}$$

$$(39) \quad \langle \hat{V} \rangle = \int dx^N \sum_{i \neq j=1}^N \psi^*(x_1 \dots x_N) \hat{V}_D[x_i, x_j] \psi(x_1 \dots x_N)$$

u.s.w. Hierbei ist die Abhängigkeit " $[x_i]$ " bzw. " $[x_i, x_j]$ " symbolisch gemeint und kann auch $\frac{\partial}{\partial x_i}$ enthalten.

Den Observablen im Hilbertraum $\mathcal{H}(N)$ von N identischen Teilchen lassen sich Operatoren im Fockraum $\mathcal{F}$ zuordnen. Da die Observablen den Superauswahlregeln genügen müssen, d.h. mit dem Teilchenzahloperator kommutieren müssen, ist die Wirkung der Fockraumoperatoren auf Zustände mit N Teilchen identisch zu der Wirkung der Hilbertraumoperatoren. Wir werden später sehen, daß es für bestimmte Rechnungen oft nützlich ist die Superauswahlregeln ein wenig zu verletzen und in Approximationen eine Verletzung der Erhaltung der Teilchenzahl zuzulassen. $\uparrow$

$$(40) \quad \boxed{\hat{H}_N = \sum_{j=1}^N \hat{h}_j \quad \longleftrightarrow \quad \hat{H} = \sum_{k,e} \langle k | \hat{h} | e \rangle \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_e}$$

mit orthogonalen Einteilchenwellenfunktionen $\phi_e(x)$ und

$$(40a) \quad \langle k | \hat{h} | e \rangle = \int dx \phi_k^*(x) \hat{h}_D(x) \phi_e(x)$$

sowie

$$(41) \quad \boxed{\hat{V}_N = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^N \hat{v}_{ij} \quad \longleftrightarrow \quad \hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{k,e,m,n} \langle k,e | \hat{v} | m,n \rangle \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_e^\dagger \hat{c}_m \hat{c}_n}$$

mit

$$(41a) \quad \langle k,e | \hat{v} | m,n \rangle = \int dx \int dx' \phi_k^*(x) \phi_e^*(x') \hat{v}_D(x, x') \phi_m(x) \phi_n(x')$$

Analoge Ausdrücke findet man für Bosonen mit $\hat{c} \rightarrow \hat{b}$

(B) Feldoperatoren

In den Gleichungen (40) und (41) tauchen stets Größen der Art ($\hat{c} \rightarrow$ Fermionen, $\hat{b} \rightarrow$ Bosonen)

$$(42) \quad \begin{array}{l} \hat{\psi}^\dagger(x) \equiv \sum_j \phi_j^*(x) \hat{c}_j^\dagger \\ \hat{\psi}(x) \equiv \sum_j \phi_j(x) \hat{c}_j \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{bzw. mit } \hat{b}_j^\dagger \\ \text{bzw. mit } \hat{b}_j \end{array}$$

• auf, wobei die $\{\phi_j(x)\}$ einen vollständigen (diskret) und orthogonalen Satz von Einteilchenwellenfunktionen darstellen. Diese Größen wollen wir Schrödinger-Feldoperatoren nennen. Die Vollständigkeit der $\phi_j(x)$

$$(43) \quad \sum_j \phi_j^*(x) \phi_j(x') = \delta(x-x')$$

impliziert die folgenden Vertauschungsregeln:

• (i) Bosonen:

$$(44) \quad [\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')] = 0$$

$$[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')] = \sum_j \phi_j(x) \phi_j^*(x') \underbrace{[\hat{b}_j, \hat{b}_j^\dagger]}_{\delta_{jj}} = \delta(x-x')$$

$$(45) \quad [\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')] = \delta(x-x')$$

analog findet man für

(ii) Fermionen

$$(46) \quad \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')\} = 0$$

$$(47) \quad \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')\} = \delta(x-x')$$

☞ Mit Hilfe der Feldoperatoren lassen sich die Ein- bzw. Zweiteilchenoperatoren wie folgt schreiben

$$(48) \quad \hat{H} = \int dx \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{h}_0(x) \hat{\psi}(x)$$

$$(49) \quad \hat{V} = \frac{1}{2} \int dx \int dx' \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x') \hat{v}_0(x, x') \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x')$$

Bem: (i) Wir haben hier nur diskrete Spektren betrachtet. Das ist für unsere Zwecke ausreichend. In einer echten Quantenfeldtheorie treten natürlich auch kontinuierliche Spektren auf deren Behandlung etwas mehr Sorgfalt erfordert.

(ii) Die zweite Quantisierung wurde hier konstruiert am Beispiel nichtrelativistischer Teilchen eingeführt. Ein alternativer und allgemeinerer Zugang ist über den Lagrange-Hamilton Formalismus für Felder.

(C) Zusammenhang zwischen Vielteilchenwellenfunktionen und Feldoperatoren

Jede erlaubte N -Teilchenwellenfunktion lässt sich noch symmetrischen bzw. antisymmetrischen Basisfunktionen entwickeln

$$\begin{aligned} \phi(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{v_1, \dots, v_N} g_{v_1, \dots, v_N} \varphi_{v_1, \dots, v_N}^{(A/S)}(x_1, \dots, x_N) \\ (50) \quad &= \langle x_1, \dots, x_N | \phi \rangle_N \end{aligned}$$

Bew.

$$\begin{aligned} |\phi\rangle_N &= \underbrace{\int dx_1 \dots \int dx_N |x_1, \dots, x_N\rangle \langle x_1, \dots, x_N | \phi \rangle_N}_{\hat{1}_N} \\ (51) \quad &= \int dx_1 \dots \int dx_N \phi(x_1, \dots, x_N) |x_1, \dots, x_N\rangle \end{aligned}$$

Behauptung:

$$(52) \quad |x_1, \dots, x_N\rangle = \hat{\psi}^+(x_1) \dots \hat{\psi}^+(x_N) |0\rangle$$

$$\text{Bew.:} \quad |x\rangle \stackrel{?}{=} \hat{\psi}^+(x) |0\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle y | \hat{\psi}^+(x) | 0 \rangle &= \langle y | \sum_{\nu} \varphi_{\nu}^*(x) \hat{c}_{\nu}^{\dagger} | 0 \rangle = \langle y | \sum_{\nu} \varphi_{\nu}^*(x) | 1_{\nu} \rangle \\ &= \sum_{\nu} \varphi_{\nu}^*(x) \langle y | 1_{\nu} \rangle = \sum_{\nu} \varphi_{\nu}^*(x) \varphi_{\nu}(y) = \delta(x-y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

□

$$(53) \quad |\phi\rangle_N = \int dx_1 \dots \int dx_N \phi(x_1, \dots, x_N) \hat{\psi}^+(x_1) \dots \hat{\psi}^+(x_N) |0\rangle$$