

Schriftliche Zusammenfassung des
Hauptseminarvortrages
"Wechselwirkungen von einzelnen Atomen mit
stark koppelnden Resonatoren"

Johannes Otterbach

Hauptseminar zur Quanteninformationsverarbeitung,
10.01.2007

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	2
2	Quantenmechanik der Cavity Quantenelektrodynamik	4
2.1	2-Niveau-Systeme im Resonator und strong-coupling	4
2.2	Aus zwei mach drei Niveaus und STIRAP	7
3	Realisierung von C-Operationen	9
4	Quantennetzwerk	11
5	Deterministische Einphotonenquellen	15
5.1	Schema der Erzeugung	15
5.2	Nachweis von Einzelphotonen	15
5.3	Realisierung in ^{85}Rb	17
6	Zusammenfassung	19
	Literaturverzeichnis	20

1 Motivation

Seit der Entdeckung des Quantenparallelismus zum Lösen komplexer Problem (z.B. Faktorisierung großer Produkte aus zwei Primzahlen), ist es von größtem Interesse geeignete Quanten-Informationsträger, die sog. Qubits, zu finden und geschickt zu implementieren. Wie bereits für die klassische Informationstheorie bekannt und für die Quanten-Information nochmals bestätigt, reicht es dabei völlig 2-Bit Operationen und dementsprechend zwei 2-Zustand-Qubits zu verwenden. In einer groben Einteilung kann man dabei von 2 Kategorien ausgehen:

- **Flying Qubits:** Wie der Name schon sagt, dienen sie dem Transport von Information. Daher sollten sie schnell und robust gegenüber der Umwelt sein. Offensichtlich bestens dafür geeignet sind Photonen. Die Schwachstelle dieser Qubits liegt allerdings in der Realisierung von 2-Bit-Gattern, da der Wirkungsquerschnitt von Photonen mit Photonen in der Größenordnung $\sim \lambda^2$ liegt:

$$\sigma_{ph-ph} \propto \lambda^2 \tag{1}$$

- **Stationary Qubits:** Stationary Qubits sollen dazu dienen lokal Manipulationen an einzelnen Qubits vornehmen zu können, da dies oft einfacher ist, als bei bewegten Qubits. Als solche können zum Beispiel neutrale Atome, Moleküle oder Ionen dienen. Man kann diese in hinreichender Art und Weise an einem Punkt halten und so gut manipulieren, z.B. mittels Laser oder Magnetfeldern. Ein weiterer Vorteil von Atomen ist, dass sie sich sehr gut zur Realisierung von 2-Bit Operationen eignen, da man zwei Qubits in zwei unterschiedlichen Niveaus eines Atoms speichern kann und auf diese Weise gut verarbeiten kann. Der große Nachteil dieser Qubit-Träger ist ihre Masse, da sie dadurch nur schlecht als Flying Qubits eingesetzt werden können.

Es liegt nun auf der Hand beide Arten von Qubits miteinander zu verknüpfen um von den Vorteilen beider Gebrauch machen zu können und die gegenseitigen Nachteile auszugleichen. Man kann sich in einem einfachen Modell zwei Atome mit jeweils einem Qubit vorstellen und deren informationstheoretische Wechselwirkung mittels Photonen realisieren.

Dieses Modell wirft allerdings direkt eine neue Herausforderung auf: es muss garantiert werden, dass ein Qubit aus einem Atom deterministisch durch genau ein Photon auf das andere Atom übergeht. Das wirft die Frage nach deterministischen Einphotonenquellen auf, um kontrollierte Kommunikation zu gewährleisten.

Um nun der Frage nachzugehen wie wir photonische und atomare Qubits miteinander verknüpfen können, werden wir uns in einem ersten Schritt mit der zugrundeliegenden Quantenmechanik der Cavity Quantenelektrodynamik (CQED) befassen. Der Resonator wird dazu benötigt um gezielt eine einzelne Mode des elektromagnetischen Feldes mit einem Übergang des Atoms in einer bestimmten Art und Weise zu koppeln. Dadurch können kohärente Übergänge zwischen photonischen und atomaren Anteilen des Qubits realisiert werden.

In einem zweiten Schritt werden wir uns dann damit befassen wie wir mittels unserer bis dahin erworbenen Kenntnisse eine spezielle 2-Bit Operation, die sog. controlled-qubit-Funktion, realisieren können.

Haben wir dies, so ist es klar, dass wir uns im dritten Teil mit der Frage der Konstruktion einfacher Quantennetzwerke beschäftigen werden. Diese werden dafür gebraucht beliebige Informationen in einem Netzwerk austauschen und bearbeiten zu können.

Als letzten Teil werden wir uns schließlich noch mit einem bestimmten Verfahren, dem STIRAP-Verfahren, zur deterministischen Realisierung von Einphotonenquellen beschäftigen, welches unabdingbar ist um Quantennetzwerke realisieren zu können.

Ein weiteres Kriterium unter dem wir die folgenden Modelle betrachten werden, beruht auf zwei von DiVincenzo vorgeschlagenen Eigenschaften, welche ein zur Quanteninformationsverarbeitung verwendbares System besitzen muss:

- **Skalierbarkeit:** Ein System muss skalierbar sein, d.h. es muss ohne große Schwierigkeiten möglich sein, weitere Qubits hinzuzufügen um schlussendlich beliebig große Quantenrechner bauen zu können.
- **Identifikation einzelner Qubits:** Um gezielte Manipulation gewährleisten zu können muss es möglich sein, jedes einzelne Qubit identifizieren zu können. Dies ist analog zur Unterscheidung der Positionen von 0 und 1 in der klassischen Informationsverarbeitung.

Ausführlicheres zu diesen Eigenschaften findet man auch in [5].

Die CQED bietet den notwendigen physikalischen Rahmen und erfüllt die obigen Kriterien in einer hinreichenden Weise: (i) es ist eine gezielte Kopplung von Photonen an Atome möglich, (ii) die Skalierbarkeit ist gewährleistet, da man ohne weiteres einen weiteren Resonator hinzufügen kann, und schließlich ist (iii) auch die Identifikation gewährleistet, da die Resonatoren klassische Objekte und somit per se unterscheidbar sind.

2 Quantenmechanik der Cavity Quantenelektrodynamik

2.1 2-Niveau-Systeme im Resonator und strong-coupling

Die Quantenmechanik der CQED beschäftigt sich mit der Wechselwirkung von Photonen, also dem quantisierten elektromagnetischen Feld, mit einzelnen Übergängen in einem Atom.

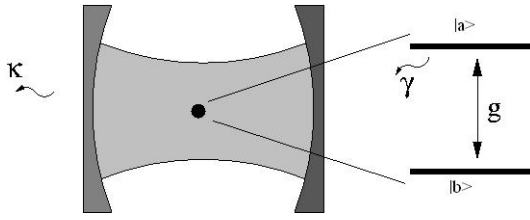


Abbildung 1: einfachstes Resonatormodell mit Zerfallskanälen

Abb. (1) zeigt das einfachste Modell, welches sinnvollerweise angenommen werden kann. Es enthält einen Resonator bestehend aus zwei Spiegeln mit Reflexivitäten $R = 1$ bzw. $R < 1$. Die angeregte Resonatormode kann über letzteren mit einer Zerfallsrate κ zer-

fallen. Im Resonator selbst befindet sich ein einzelnes 2-Niveau Atom mit den internen Zuständen $|a\rangle$ und $|b\rangle$, welche innerhalb des Resonators über die Kopplungskonstante g miteinander verknüpft sind. $|a\rangle$ kann mit einer Rate γ spontan zerfallen. Die hellgrau hinterlegte Fläche innerhalb des Resonators soll das Modenvolumen V darstellen.

Um nun die Kopplungskonstante g berechnen zu können, muss das elektromagnetische Feld quantisiert werden, da man nur mit einzelnen Photonen wechselwirken wird. Das quantisierte elektromagnetische Feld einer einzelnen Mode ist gegeben durch (siehe [8]):

$$\hat{E} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \cdot f(\vec{r}) \quad (2)$$

Hierbei ist ω die der Mode zugehörige Kreisfrequenz und V das soeben genannte Modenvolumen. Die Operatoren \hat{a} und \hat{a}^\dagger bezeichnen die Vernichtung bzw. Erzeugung einer Mode der Frequenz ω , also sozusagen eines einzelnen Photons. Zuletzt steht $f(\vec{r})$ für die Wellenfunktion der Mode. Der Vorfaktor $\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}$ ist also das elektrische Feld pro einzeltem Photon.

Um nun die Wechselwirkung zwischen Photon und Atom zu beschreiben, geht man vom Prinzip minimaler Kopplung aus und findet in erster Ordnung die Dipolwechselwirkung:

$$\mathcal{H} = -\hat{d} \cdot \hat{E} \quad (3)$$

Der Dipoloperator \hat{d} kann dabei nun mittels "Entwicklung der 1" geschrieben werden als

$$\hat{d} = d_{ab} |a\rangle \langle b| + d_{ba} |b\rangle \langle a| \quad (4)$$

Nimmt man nun o.B.d.A an, dass $\wp \equiv d_{ab} = d_{ba}$ und setzt Gl. (2) und (4) in Gl. (3) ein, so findet man in der rotating-wave-approximation (RWA) folgenden Ausdruck für die Dipolwechselwirkung:

$$\mathcal{H} = -\hat{d} \cdot \hat{E} \xrightarrow{RWA} \hbar g (|a\rangle \langle b| \hat{a} + h.a.) \quad (5)$$

Aus Gl.(5) lässt sich nun g ablesen:

$$g = \wp \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\epsilon_0 V}}. \quad (6)$$

Man erkennt, dass die Kopplung dem Modenvolumen umgekehrt proportional ist. Man ist daher daran interessiert möglichst kleine Resonatoren zu konstruieren um eine möglichst große Kopplung zu erhalten. Dies liegt an den besonderen Eigenschaften des sog. strong-coupling regimes. Man unterscheidet zwei Grenzfälle für g (siehe auch [6, Kap.10]):

- $g^2 \ll \kappa\gamma$: weak-coupling regime
Gilt o.B.d.A. $g \ll \gamma$ so folgt daraus direkt, dass $T_\gamma \ll T_g$, wobei nun T die charakteristische Zeit der entsprechenden Dynamik ist. Dies gilt, da $T_x = \frac{1}{x}$. Man erkennt hieran, dass die Dynamik der Kopplung viel langsamer als der Zerfall des oberen Laserniveaus geschieht, und somit inkohärente Prozesse die größte Wahrscheinlichkeit haben.
- $g^2 \gg \kappa\gamma$: strong-coupling regime
Mit dem selben Argument wie oben lässt sich nun zeigen, dass $T_g \ll T_{\gamma,\kappa}$ ist. D.h., die gekoppelte kohärente Dynamik verläuft viel schneller, als der Zerfall durch spontane Emission oder entweichen aus dem Resonator. Da die gekoppelte Dynamik kohärent ist, ist sie unitär und somit reversibel. In diesem Bereich kann man also unitäre Dynamik zwischen Atom und Resonator beobachten. Ein Photon wird sozusagen schneller emittiert und wieder absorbiert, als es aus dem Resonator entweichen kann.

Man erkennt sofort, dass im Bereich des strong-coupling völlig neue Effekte auftreten werden. Jedoch besteht eine der großen Herausforderungen darin, dieses Regime überhaupt erst zu erreichen. Um eine Vorstellung davon zu bekommen, wie herausfordernd diese Aufgabe ist, kann man sich den Zusammenhang zwischen g^2 und $(\kappa \cdot \gamma)$, der Einfachheit halber, in einem Fabry-Perot-Resonator anschauen:

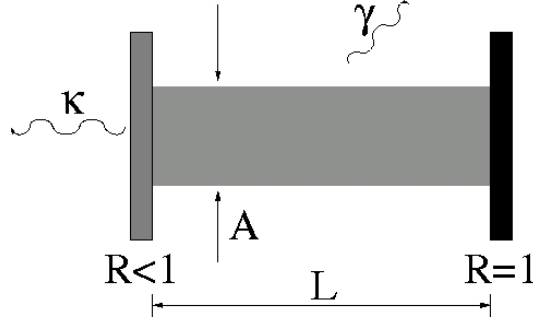


Abbildung 2: Fabry-Perot-Resonator

Der hier betrachtete Fabry-Perot-Resonator (siehe Abb.2) besteht aus zwei planparallelen Spiegeln mit Reflexivitäten $R_1 = 1$ und $R_2 = R < 1$ im Abstand L . Das Modenvolumen lässt sich bestimmen zu $V = A \cdot L$. Die Resonatorverlustrate κ ist bestimmt durch die "Verlustzeit" des Resonators und lässt sich ausdrücken durch $\kappa = (1 - R) \frac{c}{2L}$, wobei $\frac{c}{2L}$ die reziproke Umlaufzeit eines einzelnen Photons im Resonator ist. Die Verlustrate γ des spontanen Zerfalls kann mittels des Einstein-A-Koeffizienten ausgedrückt werden:

$$\gamma = \wp^2 \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3 \hbar \epsilon_0}. \quad (7)$$

Nach Gl.(6) gilt:

$$g^2 = \wp^2 \frac{\omega}{2\hbar \epsilon_0 A \cdot L} \quad (8)$$

wobei hier das Modenvolumen bereits durch $A \cdot L$ ersetzt wurde. Ersetzt man nun L und \wp^2 in Gl. (8) mit Hilfe der Gleichungen für κ und γ , so erhält man nach einigen Umformungen:

$$g^2 = \frac{2}{4\pi} \frac{\lambda^2}{A} \frac{1}{1 - R} \kappa \gamma. \quad (9)$$

Im strong-coupling-regime soll gelten $g^2 \gg \kappa \gamma$. Dies kann wie folgt realisiert werden:

- $A \ll \lambda^2$

Dieser Grenzfall ist im optischen Lichtwellenbereich nicht möglich, da dies eine Fokussierung des Modenvolumenquerschnitts auf weniger als eine Quadratwellenlänge erfordern würde. Jedoch liegt schon bei gut fokussierten Lasern die Größe der Strahltaile bei mehreren 10-100 Wellenlängen.

- $\frac{1}{1-R} \gg 1$

Dieser Grenzfall erfordert $(1 - R) \rightarrow 0$. D.h. die Reflexivität des Auskoppelspiegels muss sehr nah bei 1 liegen. Die große Herausforderung liegt also nun darin Resonatoren zu konstruieren, deren Reflexivitäten möglichst nah bei 1 liegen. Man spricht daher von high-Q-cavities, da der Q-Faktor ($Q \equiv \frac{\omega}{\Delta\omega}$) sehr groß werden muss. $\Delta\omega$ wird hierbei bestimmt durch den freien Spektralbereich des Resonators, welcher sehr klein werden muss. (Siehe dazu auch [6, Kap.10].)

2.2 Aus zwei mach drei Niveaus und STIRAP

In der Quanteninformationverarbeitung möchte man möglichst alle inkohärenten Zerfallsquellen ausschalten. Eine Zerfallsquelle, der spontane Zerfall γ , lässt sich dadurch vermeiden, das man nicht das vorgeschlagene 2-Niveau-System aus dem vorigen Abschnitt verwendet, sondern ein leicht komplizierteres 3-Niveau-System (siehe Abb. 3) zugrunde legt.

Das vorgeschlagene 3-Niveau- Λ -System besteht nun also aus drei Niveaus $|a\rangle$, $|b\rangle$, welche (meta)stabil sind und $|c\rangle$, welches mit einer Rate γ spontan zerfallen kann. Die Niveaus $|b\rangle$ und $|c\rangle$ sind über die quantisierte Resonatormode mit der Kopplungskonstante g miteinander verknüpft. Die Niveaus $|a\rangle$ und $|c\rangle$ sind über ein klassisches Feld E mit Rabi-Frequenz $\Omega = \frac{\varphi_{ac} E}{\hbar}$ miteinander gekoppelt. Ein Übergang zwischen den Niveaus $|a\rangle$ und $|b\rangle$ soll verboten sein. Es liegt nun auf der Hand das Qubit als Kohärenz zwischen $|a\rangle$ und $|b\rangle$ zu definieren. Dieses kann somit nicht mehr spontan inkohärent zerfallen und ein möglicher Zerfallskanal ist eliminiert.

Ein weiterer Vorteil dieses Systems liegt darin, dass man über das zusätzliche klassische Feld E eine weitere Einflussmöglichkeit auf das System hat. E wird daher auch Kontrollfeld genannt. Die Einflußnahme kann z.B. über dynamische (ac-)Stark-Shifts erfolgen, welche die Energie der Niveaus $|a\rangle$ und $|c\rangle$ verschiebt und somit also auch einen Einfluß auf die Kopplung $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ hat.

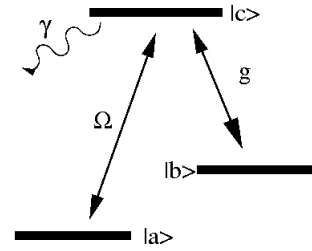


Abbildung 3: 3-Niveau-System

Ein besonders schöner Effekt, welcher bei dem vorgeschlagenen System auftritt, ist der STIRAP - Stimulated Raman Adiabatic Passage. Mit Hilfe dieses Prozesses kann man 100% der Population aus Niveau $|a\rangle$ in Niveau $|b\rangle$ transferieren, was in einem 2-Niveau-System nicht möglich ist, da dies mit maximal 50% begrenzt ist.

Der Hamiltonoperator des 3-Niveau-Systems lautet im Wechselwirkungsbild (siehe [3]):

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega & 0 \\ \Omega^* & 2\Delta & 2g \\ 0 & 2g^* & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Dabei ist Δ die gemeinsame Verstimmung von Kontrollfeld und Resonatormode vom oberen Niveau $|c\rangle$. Die zu dieser Matrix zugehörige Basis lautet $\{|a\rangle, |c\rangle, |b\rangle\}$. Bei Vernachlässigung der Zeitabhängigkeit kann der Zustand des Systems $|\Psi\rangle$ ausgedrückt werden als Superposition der Basiszustände:

$$|a^+\rangle = \cos\varphi \sin\vartheta |a\rangle - \sin\varphi |c\rangle + \cos\varphi \cos\vartheta |b\rangle \quad (11a)$$

$$|a^-\rangle = \sin\varphi \sin\vartheta |a\rangle + \cos\varphi |c\rangle + \sin\varphi \cos\vartheta |b\rangle \quad (11b)$$

$$|a^0\rangle = \cos\vartheta |a\rangle - \sin\vartheta |b\rangle \quad (11c)$$

Die auftretenden Winkel heißen Mischungswinkel und sind wie folgt definiert:

$$\tan\vartheta = \frac{\Omega}{2g} \quad (12a)$$

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{4g^2 + \Omega^2}}{\sqrt{4g^2 + \Omega^2 + \Delta^2} - \Delta} \quad (12b)$$

Ändert man nun das Kontrollfeld Ω als Funktion der Zeit so ändern sich die Eigenzustände ebenfalls in der Zeit, da sich die zugehörigen Mischungswinkel ändern.

Besonders auffällig ist das Verhalten des Zustandes $|a^0\rangle$. Dieser enthält keine Beimischungen des instabilen, angeregten Zustandes $|c\rangle$ und wird daher auch "dark-eigenstate" genannt. Befindet sich das System anfangs in Zustand $|a\rangle$ so wird durch Anlegen des Kontrollfeldes auf eine bestimmte Art und Weise die gesamte Population von $|a\rangle$ nach $|b\rangle$ verschoben. Dies gilt allerdings nur solange, wie der Prozeß adiabatisch abläuft. Dieser Prozess ist unitär und damit reversibel, d.h. man kann beliebig die Population zwischen $|a\rangle$ und $|b\rangle$ hin- und herschieben, ohne dabei Gefahr zu laufen, dass das System zerfällt, da es ja keine Beimischung des Niveaus $|c\rangle$ enthält. Darüberhinaus ist man nicht auf maximal 50% der Population beim Transfer beschränkt.

Wir haben in diesem Abschnitt nun die Grundlagen für die folgenden Abschnitte gelegt und können uns jetzt der Realisierung von controlled-qubit-Operationen zuwenden. Dabei wird uns wiederum ein "dark-state" begegnen, welcher ähnlich Eigenschaften wie der soeben vorgestellte aufweisen wird. Man wird auch im danach Folgenden erkennen, dass sich die in diesem Abschnitt vorgestellten Prinzipien stets wiederholen werden und somit sehr grundlegend sind für die Quanteninformationsverarbeitung mit Resonatoren.

3 Realisierung von C-Operationen

Zur Verarbeitung von Information ist es notwendig 2-Bit-Gatter zu konstruieren, welche abhängig von einem der beiden Bits eine Manipulation des zweiten Bits durchführen. Solche Operationen nennt man in der Quanteninformaton C-Operationen (controlled-qubit-Operationen). Die generelle Struktur ist dabei die Folgende ($\epsilon_i \in \{0, 1\}$):

$$|\epsilon_1\rangle |\epsilon_2\rangle \rightarrow \delta_{\epsilon_1 0} |\epsilon_1 \epsilon_2\rangle + \delta_{\epsilon_1 1} |\epsilon_1\rangle \hat{U} |\epsilon_2\rangle \quad (13)$$

Abhängig vom Zustand des Qubits $|\epsilon_1\rangle$ wird das zweite Qubit $|\epsilon_2\rangle$ nicht verändert oder einer unitären Transformation \hat{U} unterworfen.

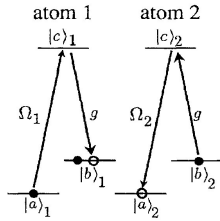


Abbildung 4: Schema zur Realisierung einer C-Operation

Das hier vorgeschlagene Schema aus [1] besteht aus zwei Atomen, die jeweils für sich ein einzelnes 2-Zustand-Qubit bilden, und mit klassischen Kontrollfeldern Ω_1 bzw. Ω_2 gesteuert werden (siehe Abb. 4). Es ist augenscheinlich klar, dass das vorliegende Schema die Forderungen der Skalierbarkeit und eindeutigen Identifikation erfüllt. Ein weiterer Vorteil ist auch, dass eine Operation zwischen beliebigen Qubits nun möglich wird, da die einzelnen Qubits ja räumlich voneinander getrennt sind und sich nicht innerhalb eines einzelnen Atoms befinden.

Die Idee einer C-Operation lässt sich nun in drei Schritte zerlegen:

1. Abbilden der 2 Qubits $|\epsilon_1\rangle, |\epsilon_2\rangle$ auf ein einzelnes 4-Niveau-System des Atoms 2, wobei Atom 1 in Zustand $|0\rangle$ übergeht.
2. Manipulation der Zustände des Atoms 2 gemäß

$$|\epsilon_1 \epsilon_2\rangle \rightarrow \delta_{\epsilon_1 0} |\epsilon_1 \epsilon_2\rangle + \delta_{\epsilon_1 1} \sum_{\epsilon'_2} |\epsilon_1 \epsilon'_2\rangle \langle \epsilon'_2| \hat{U} |\epsilon_2\rangle$$

Die unitäre Transformation \hat{U} kann dabei z.B. das Anlegen eines äußeren magnetischen oder elektrischen Feldes sein.

3. Die umgekehrte Abbildung zu Schritt 1 wird angewandt.

Das vorgeschlagene System realisiert die Wechselwirkung zwischen zwei beliebigen Qubits also dadurch, dass es das eine Qubit auf das andere abbildet, was nicht durch räumliche Separation beeinträchtigt wird.

Der Hamiltonoperator des Systems lautet im Wechselwirkungsbild ($\hbar = 1$):

$$\mathcal{H}_I = \sum_{j=1,2} \left(\frac{\Omega_j(t) e^{-i\omega_L t}}{2} |c\rangle_{jj} \langle a| + \frac{g}{2} |c\rangle_{jj} \langle b| \hat{b} \right) + \text{h.a.}, \quad (14)$$

dabei sind $\Omega_j(t)$ verschiedene klassische Kontrollfelder mit der Frequenz ω_L und \hat{b} der Vernichter eines Cavity-Photons. Unter den Eigenzuständen dieses Hamiltonoperators befinden sich wiederum dark-states:

$$|D_0\rangle = |b, b, 0\rangle \equiv |b\rangle_1 |b\rangle_2 |0\rangle_c \quad (15a)$$

$$|D_1\rangle \propto \Omega_1 g |b, a, 0\rangle + \Omega_2 g |a, b, 0\rangle - \Omega_1 \Omega_2 |b, b, 1\rangle \quad (15b)$$

Dabei bezeichnet $|X\rangle_c$ den Zustand des Resonators, in dem Sinne, dass X die Anzahl der Photonen in der Resonatormode bezeichnet. Schaut man sich nun den Zustand $|D_1\rangle$ an, so stellt man folgendes Grenzverhalten fest:

- $\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \rightarrow 0$: $|D_1\rangle \rightarrow |b, a, 0\rangle$
- $\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \rightarrow 0$: $|D_1\rangle \rightarrow |a, b, 0\rangle$

Es ist also möglich durch geschickte Wahl der Zeitabhängigkeit der beiden Kontrollfelder die Operation $|b, a, 0\rangle \leftrightarrow |a, b, 0\rangle$ durchzuführen. Präpariert man nun das System zusätzlich in einer Superposition zwischen $|D_0\rangle$ und $|D_1\rangle$, so kann man beliebige Kohärenzen von Atom 1 auf Atom 2 übertragen:

$$(A|a\rangle_1 + B|b\rangle_1)|b\rangle_2|0\rangle_c \leftrightarrow |b\rangle_1(A|a\rangle_2 + B|b\rangle_2)|0\rangle_c. \quad (16)$$

Dies gilt für beliebige Koeffizienten A, B . Es ist somit möglich ein beliebiges Qubit, welches ja definiert war als Kohärenz zwischen den Zuständen $|a\rangle_i$ und $|b\rangle_i$, zwischen zwei Atomen zu transferieren. Das System weist also, wie zu Beginn bereits erwähnt, ein STIRAP-ähnliches Verhalten auf: Die Kohärenz zwischen zwei Atomen lässt sich beliebig hin- und herschieben, ohne Gefahr zu laufen, dass das System über einen instabilen angeregten Zustand zerfällt. Einige weitere Vorteile des Systems sind, (i) dass die Wechselwirkungen während des gesamten Prozesses resonant sein können und somit keine Phasenverschiebungen auftreten, (ii) dass es nicht von Nöten ist genaue Wechselwirkungszeiten einzuhalten, solange man sich sicher ist, dass der Prozeß adiabatisch abläuft, (iii) dass ein Zerfall durch Entweichen eines Photons aus dem Resonator nur in der kurzen Zeit der Besetzung des Zustandes $|b, b, 1\rangle$ auftreten kann.

Mit diesem Modell für einen Kohärenztransfer läßt sich nun Schritt 1 des Protokolles ausführen. Da sich nun beide Qubits innerhalb des Atoms 2 befinden, kann man nun, z.B. durch Anlegen äußerer Felder, eine 2-Qubit-Operation durchführen (entspricht Schritt 2). Nach Manipulation der beiden Qubits durch dieses 2-Qubit-Gatter, bedient man sich wiederum des Transferschemas um die Qubits wieder auf die zwei Atome zu verteilen (Schritt 3).

Wir haben also gesehen, dass es prinzipiell möglich ist, ein System zu realisieren, welches unitäre 2-Qubit-Operationen zulässt und den Anforderungen an einen Quantencomputer (Skalierbarkeit, Identifizierbarkeit) standhält. Jedoch ist dies nur im Grenzfall des strong-coupling-regime möglich, welches, wie wir gesehen haben, sehr strenge Anforderungen an die physikalische Wirklichkeit stellt.

Um fortzufahren in der Konstruktion eines Quantencomputers benötigen wir natürlich Netzwerke, über welche wir die Quanteninformation austauschen können. Mit der Verwirklichung eines solchen, wird sich der nächste Abschnitt befassen. Wir werden dort von der soeben vorgestellten Idee des Kohärenztransfers zwischen zwei Atomen Gebrauch machen, die sich nun aber in zwei verschiedenen Resonatoren befinden, welche die Knoten des Netzwerkes darstellen.

4 Quantennetzwerk

Ein Netzwerk besteht i.A. aus zwei oder mehr Knoten, welche die einkommenden Signale verarbeiten und gegebenenfalls weitersenden und den dazu notwendigen Leitungen. Wir werden hier in der Darstellung einem Vorschlag aus [2] folgen, wo ein sehr simples Modell für ein Netzwerk vorgeschlagen wird, welches aus zwei Resonatoren (entsprechen den Knoten) und einer Leitung, die nur Kommunikation in eine Richtung zulässt, besteht (siehe Abb. 5).

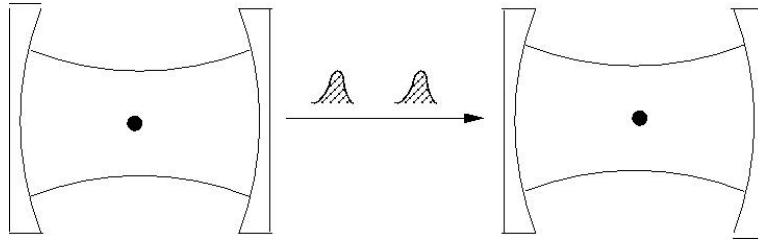


Abbildung 5: Modell eines Netzwerkes

Ziel einer Quantentransmission ist es immer, diese mit einer Effizienz von 100% ablaufen zu lassen, also eine ideale Transmission durchzuführen:

$$\begin{aligned}
 (c_g |g\rangle_1 + c_e |e\rangle_1) |g\rangle_2 \otimes |0\rangle_1 |0\rangle_2 |vac\rangle \\
 \longrightarrow |g\rangle_1 (c_g |g\rangle_2 + c_e |e\rangle_2) \otimes |0\rangle_1 |0\rangle_2 |vac\rangle
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Diese Art des Kohärenztransfers ist uns bereits in Gl. (16) begegnet. Im Unterschied zum dem dortigen Kontext, befinden sich hier die Atome jedoch

in zwei räumlich getrennten Resonatoren (siehe Abb. 6), und somit treten hier noch weitere Möglichkeiten der Dekohärenz, wie z.B. die Reflexion des Lichtpulses am Spiegel des zweiten Resonators (Empfänger), auf. Dieser, in der Tat dominante Dekohärenzkanal, kann durch Kontrolle des Transmissionsprozesses vollständig unterbunden werden:

Nehmen wir an, dass das emittierte Photon als Wellenpaket entlang der Leitung propagiert. Könnten wir dieses Wellenpaket in der Zeit umkehren und es in seinen Ausgangsresonator zurückschicken, würde es den vorherigen Zustand des Atoms im Resonator wieder herstellen, vorausgesetzt, wir würden auch die Laserpulse in der Zeit umkehren. Wenn wir allerdings in der Lage wären, das Atom in Resonator 1 derart zu manipulieren, dass das ausgesandte Wellenpaket in der Zeit symmetrisch wäre, so würde dieses im Empfängerresonator 2 den vorher dargestellten zeitgespiegelten Prozess nachahmen und so den Zustand des Atoms 1 in Atom 2 "wieder herstellen". Solche Photonen heißen zeitsymmetrische Photonen.

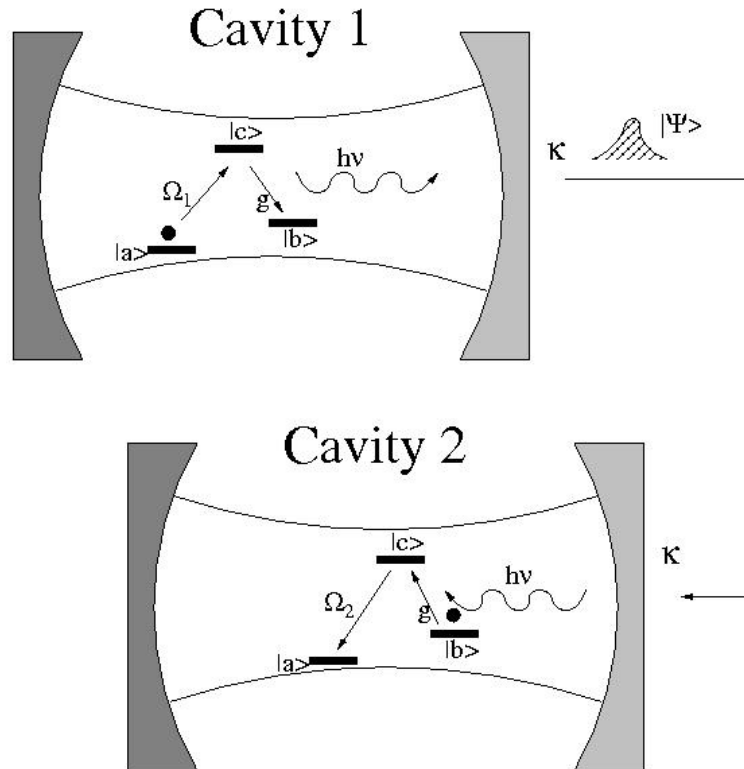


Abbildung 6: Modell eines Netzwerkes

Um nun die Quantentransmission zu beschreiben, benutzen wir das Modell aus dem vorigen Abschnitt, trennen jedoch die Atome und setzen sie in

separate Kavitäten. Die Dynamik innerhalb der einzelnen Resonatoren lässt sich jetzt mittels des folgenden Hamiltonoperators beschreiben:

$$\mathcal{H}_i = -\delta \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{g^2}{\Delta} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i |b\rangle_{ii} \langle b| + \delta \omega_i(t) |a\rangle_{ii} \langle a| - i g_i(t) [e^{i\phi_i(t)} |a\rangle_{ii} \langle b| \hat{a}_i - h.a.] \quad (18)$$

Hierbei sind Δ und δ die Verstimmungen des Lasers von der Anregungsfrequenz bzw. der Resonatormode, \hat{a}_i ist der Vernichter eines Photons der Resonatormode. Der erste Term beschreibt Photonen, welche auf Grund der Verstimmung nicht absorbiert werden, die zwei folgenden Terme beschreiben ac-Stark Verschiebungen der Niveaus $|a\rangle$ bzw. $|b\rangle$, welche durch die entsprechenden Felder (Laserfeld, Resonatormode) verursacht werden, wobei $\delta \omega_i = \frac{\Omega_i^2}{4\Delta}$. Der letzte Term ist die sog. Jaynes-Cummings Wechselwirkung, welche eine effektive Kopplungskonstante $g_i(t) = \frac{g\Omega_i(t)}{2\Delta}$ enthält.

Um schließlich noch die Transmission einzuführen, behilft man sich mit einer phänomenologischen Beschreibung des Zerfalls durch einen komplexen Hamiltonoperator. Hierbei ist zu beachten, dass dieser nicht mehr hermitesch ist und sich somit Links- und Rechtseigenvektoren unterscheiden. Die gesamte Prozessdynamik lässt sich nun berechnen mittels:

$$\mathcal{H}_{eff}(t) = \mathcal{H}_1(t) + \mathcal{H}_2(t) - i\kappa \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 2\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \right). \quad (19)$$

\mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 stehen dabei für die Dynamik in den entsprechenden Resonatoren und $i\kappa \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ für den Zerfall eines Photons aus dem Resonator i . Zu guter letzt beschreibt der Term $2i\kappa \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1$ einen Transmissionsprozeß: \hat{a}_1 vernichtet ein Photon in Resonator 1, welches eben mit der Rate κ zerfällt und \hat{a}_2^\dagger erzeugt eben dieses Photon in Resonator 2.

Eine ideale Transmission kann genau dann auftreten, wenn das System während des gesamten Prozesses in einem dark-state verbleibt, also kein Zerfall auftritt. Expandiert man den dark-state $|\Psi\rangle$ in die Systembasis so hat er folgende Struktur:

$$\begin{aligned} |\Psi_c(t)\rangle &= c_b |bb\rangle |00\rangle \\ &+ c_a [\alpha_1(t) e^{i\phi_1(t)} |ab\rangle |00\rangle + \alpha_2(t) e^{i\phi_2(t)} |ba\rangle |00\rangle] \\ &+ c_a [\beta_1(t) |bb\rangle |10\rangle + \beta_2(t) |bb\rangle |01\rangle] \end{aligned} \quad (20)$$

Dabei gibt der erste Ket-Vektor jeweils den Zustand des Atoms und der zweite Ket-Vektor den Zustand des Vakuumsfeldes, d.h. die Anzahl der Photonen, im jeweiligen Resonator an. Es ist klar, dass α_i proportional zur Besetzungszahl im Zustand $|ab\rangle$ bzw. $|ba\rangle$ ist, und β_i zur Photonenzahl in den einzelnen Resonatoren. Aus (20) kann man einfach ablesen, welche Bedingungen gelten müssen um ideale Transmission zu gewährleisten:

- $\alpha_1(-\infty) = \alpha_2(+\infty) = 1$
- $\phi_1(-\infty) = \phi_2(+\infty) = 0$

Mit diesen Bedingungen kann man nun Bewegungsgleichungen finden und Bedingungen für eine gesamte Lösungsklasse von Pulsen finden. Dies wollen wir hier nicht im Detail diskutieren und es sei an dieser Stelle auf [2] verwiesen. Eine besondere Bedingung ist die oben motivierte symmetrische Puls Bedingung:

$$g_2(t) = g_1(-t),$$

welche automatisch

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= \alpha_2(-t) \\ \beta_a(t) &= \beta_a(-t)\end{aligned}$$

zur Folge hat. Dabei ist $\beta_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_2 - \beta_1)$ proportional zur Besetzungsdifferenz der Photonenzahl in den Resonatoren. Das Zeitverhalten der Lösungen dieser Klasse ist also völlig symmetrisch. Zur Kontrolle der analytischen Vorhersagen, kann man den vollen Hamiltonoperator (19) numerisch behandeln. Die Ergebnisse sind in Abb.7 zu sehen.

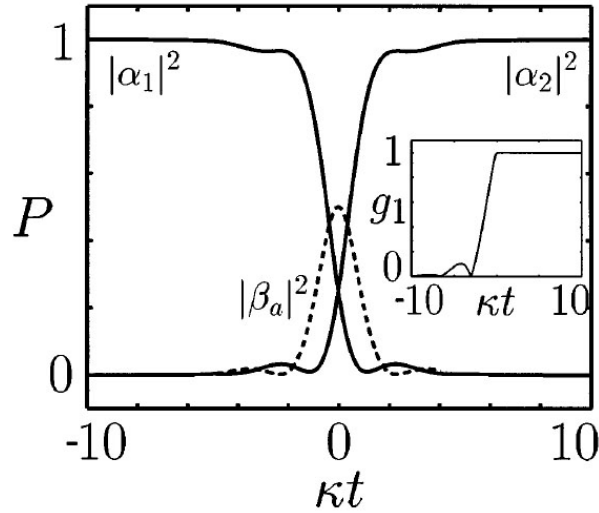


Abbildung 7: numerische Analyse des vollen eff. Hamiltonoperators (19)

Man kann sehr deutlich den Besetzungstransfer von $|\alpha_1|^2 = 1 \rightarrow |\alpha_2|^2 = 1$ erkennen, wohingegen die Anregung des Vakuumfeldes $|\beta_a|^2$ nur von sehr kurzer Dauer ist. Die gewählte Zeitabhängigkeit von g_1 ist im kleinen Kasten innerhalb der Abbildung zu sehen.

Damit ist schließlich gezeigt, dass sich unter bestimmten Bedingungen eine ideale Transmission realisieren läßt. Die Kommunikation und Wechselwirkung zwischen zwei beliebigen Knoten ist damit gewährleistet. Um dieses Schema jetzt auch wirklich verwenden zu können benötigen wir noch eine Komponente: sog. Einphotonenquellen. Damit wollen wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen.

5 Deterministische Einphotonenquellen

Wie oben bereits erwähnt soll es in diesem Abschnitt um die Generierung einzelner Photonen gehen. Dabei wird nicht irgendeine Erzeugung gemeint, sondern eine deterministische und unitäre Produktion abgestrebt, im Unterschied zu strahlenden Zerfällen, welche spontan passieren und somit nicht reversibel sind. Da der Prozeß unitär sein wird, kann man ihn somit auch ohne Probleme umdrehen und so eine deterministische Absorption erzwingen.

In einem ersten Schritt werden wir uns mit einem generellen Schema zur Erzeugung befassen, dann in einem weiteren Schritt ein Experiment vorstellen, welches Einzelphotonenproduktion nachweisen kann und zu guter letzt wird eine physikalische Realisierung des vorgestellten Prinzips präsentiert.

5.1 Schema der Erzeugung

Zur Erzeugung einzelner Photonen kann man sich des STIRAP-Prozess bedienen (siehe Abschnitt 2.2). Modifiziert man das dortige Modell in dem Sinne, dass man zusätzlich zu den atomaren Zuständen auch noch den Zustand des Vakuumfeldes berücksichtigt, so erhält man das folgende Niveauschema Abb.8. Eine genauere Behandlung findet man in [3].

Das Zielniveau $|g, 1\rangle$ schickt sein Photon sozusagen hinaus in den Resonator. Da bei dem STIRAP-Modell ein Dipolübergang $|g\rangle \leftrightarrow |u\rangle$ verboten war, braucht man einen zusätzlichen Puls um das System wieder in den Ausgangszustand $|u, 0\rangle$ zurückzubringen, damit man wiederum ein neues einzelnes Photon erzeugen kann. Die Generierung ist in sofern deterministisch, als die typische Zeitskala des adiabatischen STIRAP-Prozesses viel größer als die Zerfallszeit des Photons aus dem Resonator ist. D.h. sobald der STIRAP-Prozess beginnt entweicht das Photon bereits aus dem Resonator.

5.2 Nachweis von Einzelphotonen

Der Nachweis einzelner Photonen stellt sich als äußerst schwierig heraus, da es zwar möglich ist ein einzelnes solches nachzuweisen aber es mit den

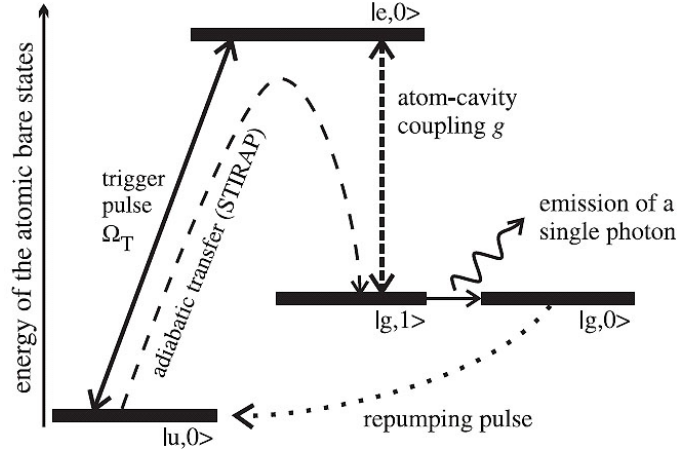


Abbildung 8: STIRAP-Schema zur Generierung einzelner Photonen

herkömmlichen Detektoren, auf Grund der langen Totzeit, nicht möglich ist zu unterscheiden, ob es sich um tatsächlich um ein einzelnes oder mehrere Photonen handelt.

Man behilft sich daher einer Korrelationsmessung (siehe Abb.9). Dazu benutzt man zwei Einzelphotonendetektoren C und D, wobei sich das Signal von Detektor D mit Hilfe einer Delayline beliebig verzögern läßt. Somit kann man die Korrelation auch in der Zeit messen. Das aus dem Resonator emittierte Photon fällt auf einen Strahlteiler und wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% auf Detektor C bzw. D weitergeleitet. Dort löst es dann ein Signal aus, welches samt Zeitpunkt registriert wird. Eine Korrelation läßt sich nun durch Auswerten der folgenden Korrelationsfunktion

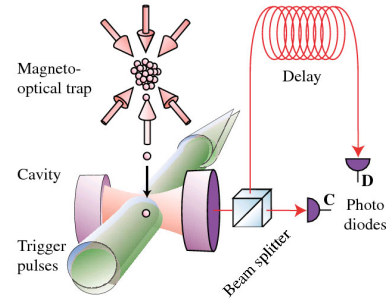


Abbildung 9: Experiment zur Korrelationsmessung

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle P_C(t) P_D(t - \tau) \rangle}{\langle P_C(t) \rangle \langle P_D(t) \rangle} \quad (21)$$

feststellen. Physikalisch läßt sich diese Funktion wie folgt verstehen: $\langle P_C(t) P_D(t - \tau) \rangle$ ist genau dann 1, wenn zum Zeitpunkt t Detektor C und zum Zeitpunkt $t - \tau$ Detektor D feuern, ansonsten ist es gleich null. Die Erwartungswerte $\langle P_C(t) \rangle$, $\langle P_D(t) \rangle$ sind nur zur Normierung der Funktion vorhanden und zählen die Anzahl der Gesamt Ereignisse am jeweiligen Detektor. Die Verzögerung τ läßt sich, wie oben erwähnt, durch die Länge der Delayline variieren.

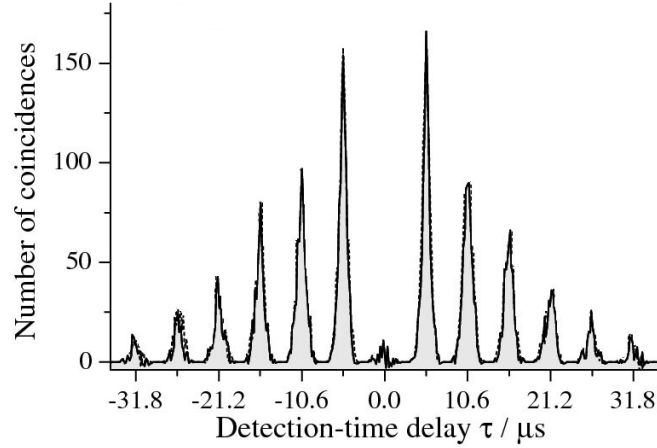


Abbildung 10: Ergebnis einer Korrelationsmessung

Es ist nun offensichtlich klar, dass genau dann nur ein Photon erzeugt wurde, wenn bei $\tau \equiv 0$ die Korrelationsfunktion $g^{(2)}(0) \equiv 0$ ist, da dann nur einer der beiden Detektoren gefeuert haben kann. Ein typisches Ergebnis einer solchen Messung ist in Abb. 10 zu sehen. Den Effekt $g^{(2)}(0) \equiv 0$ nennt man auch photon-antibunching. Der Grund für den oszillierenden Charakter von $g^{(2)}$ liegt darin, dass wenn die Verzögerungszeit τ geschickt gewählt ist, das erste Photon solange verzögert wird, bis ein zweites generiert wurde, beide Detektoren schließlich gleichzeitig feuern und somit eine Korrelation gemessen wird. D.h., der Abstand zwischen zwei Peaks entspricht gerade der Generationszeit eines einzelnen Photons. Dass die Korrelationsfunktion im realen Experiment nicht ganz null wird, liegt an zufälligen Koinzidenzen (detector noise counts), da das Experiment ja über lange Zeiten mitteln muss.

5.3 Realisierung in ^{85}Rb

Um diese Kapitel abzuschließen soll hier noch ein Experiment vorgestellt werden, welches sich der beiden soeben vorgestellten Techniken zur Einzelphotonenerzeugung und -nachweis bedient hat. Die zugehörige Veröffentlichung findet man unter [4]. Das Experiment wurde mit ^{85}Rb durchgeführt; das relevante Niveauschema ist in Abb.11 zu finden. Man erkennt, dass der repumping pulse, welcher das System wieder in den Ausgangszustand zurückführen soll, gerade den umkehrten Weg pumpt und das System dann durch spontanen Zerfall in seinen Ausgangszustand überführt wird. In Abb.12 findet man die zu dem Experiment zugehörigen Parameter: Diagramm A stellt die zeitliche Entwicklung des Pumplasers (blau/durchgezogen) und des Recycling Lasers (grau/gestrichelt) dar. Die Sägezahnspannung wurde gewählt

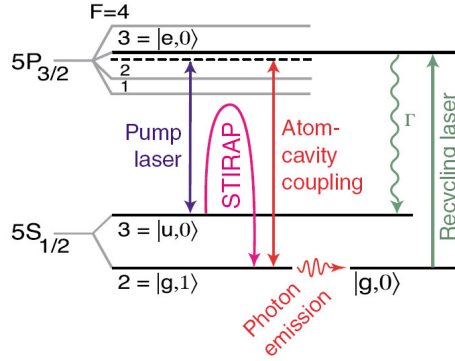


Abbildung 11: relevanter Ausschnitt aus dem Niveauschema von ^{85}Rb

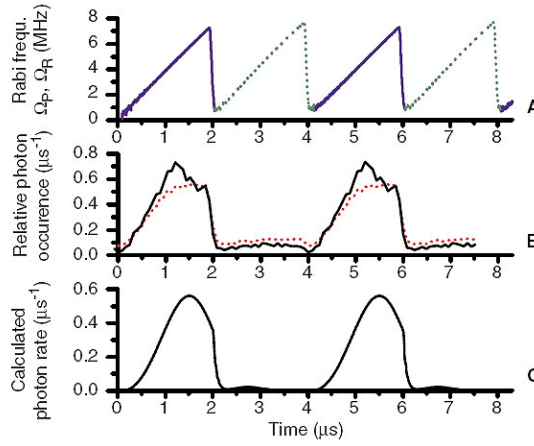


Abbildung 12: relevante Daten zum Experiment

um optimale adiabatische Bedingungen zu gewährleisten. In Diagramm B sind die experimentellen Daten zu sehen, welche man sofort mit den numerischen Erwartungen in Diagramm C vergleichen kann. Man erkennt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den beiden Graphen. Ein einzelner Peak des Diagramms entspricht genau einem deterministisch generierten Photon, und spiegelt die zeitliche Struktur des Photons, also die zeitliche Form des Wellenpakets, wider. Die Ausdehnung des Wellenpakets entspricht genau der Lebensdauer des Photons im Resonator, sprich der reziproken Zerfallsrate $\frac{1}{\kappa}$. Dies bestätigt die oben erwähnte deterministische Generierung: die charakteristische Zeitänderung des adiabatischen Vorganges ist viel größer als die Zerfallszeit aus dem Resonator.

Dass die Erwartungen keiner δ -Funktion ähnlich sind, liegt sowohl in der Natur der Quantenmechanik (siehe Unschärferelationen) als auch an der Ei-

genschaft des STIRAP dark-state:

$$|a^0\rangle = \cos\vartheta |u, 0\rangle - \sin\vartheta |g, 1\rangle.$$

Sobald der Mischungswinkel ϑ nur leicht ungleich null wird, trägt $|g, 1\rangle$ zum dark-state bei, kann daher besetzt werden und somit ein Photon emittieren.

Zu guter letzt bleibt noch zu zeigen, dass es sich auch wirklich um einzelne Photonen handelt, die hier generiert werden. Dies wurde mit einer Intensitätskorrelationsmessung nachgewiesen. Abb.13 zeigt die experimentelle Auswertung. Zum Zeitpunkt $\Delta t = 0$ erkennt man das charakteristische

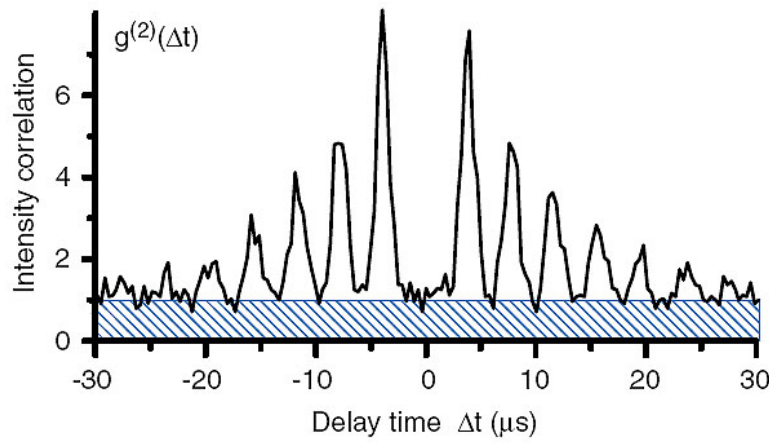


Abbildung 13: Nachweis der Einzelphotonennatur über $g^{(2)}$

photon-antibunching, welches, genauso wie der oszillierende Charakter, für die Erzeugung einzelner Photonen spricht. Es handelt sich also wirklich um eine Einzelphotonenerzeugung.

6 Zusammenfassung

Zum Abschluß läßt sich also zusammenfassen, dass sich die CQED hervorragend eignet um einen Quantencomputer zu realisieren. Die Herausforderung dabei ist das Erreichen des strong-coupling-regime $g^2 \gg \kappa\gamma$. Ist dies geschafft, so kann man mit STIRAP-ähnlichen Prozessen beliebig Kohärenzen zwischen Atomen austauschen um so 2-Bit-Gatter zu realisieren, oder um deterministisch einzelne Photonen zu erzeugen um damit Kommunikation betreiben zu können. Dabei erlaubt der doch äußerlich sehr einfache Aufbau (ein Resonator und ein Atom) Quantencomputer beliebiger Größe bauen zu können und einzelne Qubits identifizieren zu können. Damit sind grundlegende Anforderungen (Skalierbarkeit und Identifikation) an einen Quantenrechner erfüllt.

Es bleibt also abzuwarten, ob bald neue Methoden und Ideen entwickelt werden um high-Q-cavities im optischen herstellen zu können und wir dann klassische Kryptographie wie RSA völlig ersetzen müssen.

Wir müssen unbedingt Raum für Zweifel lassen, sonst gibt es keinen Fortschritt, kein Dazulernen. Man kann nichts Neues herausfinden, wenn man nicht vorher eine Frage stellt. Und um zu fragen, bedarf es des Zweifelns.

(Richard P. Feynman)

Literatur

- [1] T. Pellizzari, S.A. Gardiner, J.I. Cirac, P. Zoller: Decoherence, Continuous Observation, and Quantum Computing: A Cavity QED model, Phys. Rev. Lett.75, 3788 (1995)
- [2] J.I. Cirac, P.Zoller, H.J. Kimble, H. Mabuchi: Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network, Phys. Rev. Lett.78, 3221 (1997)
- [3] A. Kuhn, M. Hennrich, T. Bundo, G. Rempe: Controlled generation of single photons from a strongly coupled atom-cavity system, Appl. Phys. B 69, 373 (1999)
- [4] A. Kuhn, M. Hennrich, G. Rempe: Deterministic Single-Photon Source for Distributed Quantum Networking, Phys. Rev. Lett.89, 067901 (2002)
- [5] H.J. Briegel, J.I. Cirac, P. Zoller: Quantencomputer, Physikalische Blätter 55 (1999)
- [6] M. Fox: Quantum Optics. An Introduction. Oxford University Press (2006)
- [7] A. Steane: Quantum computing, arXiv:quant-ph/9708022
- [8] M. Fleischhauer: einführender Vortrag zum Hauptseminar II: Physikalische Systeme der Quanteninformationsverarbeitung. (22.11.2006)