

Linear Optics Quantum Computation (LOQC)

Handout* zum Hauptseminar “Quanteninformation”[†], WS 2006/2007, TU Kaiserslautern

Dominik Muth

30. Januar 2007

Zusammenfassung

Neben den anderen Realisierungsmöglichkeiten für einen Quantencomputer wurde schon früh die Realisierung mittels Photonen und linearer Optik in Betracht gezogen. Dies hat folgende Gründe: Zum einen werden Photonen kaum von der Umgebung gestört, das heißt man beobachtet nur geringe Dekohärenz. Andererseits sind optische Moden (die Träger der Quanteninformation in der LOQC, siehe Tabelle 1) immer und überall verfügbar, müssen also nicht erst präpariert werden, wie etwa Ionen in einer Falle. Dadurch besteht Aussicht auf gute Skalierbarkeit, wenn erst einmal die grundlegenden Gatter zur Verfügung stehen. Darüber hinaus lassen sich einzelne Photonen leicht manipulieren, wie wir sehen werden. Allerdings zeigen Photonen in der linearen Optik keine Wechselwirkung. Wir werden im Folgenden sehen, wie wir *trotzdem* ein zwei qubit Gatter (das *cnot*-Gatter nach E. Knill, R. Laflamme und G. J. Milburn [3]) realisieren können. Zum Abschluss werden noch einige experimentelle Ergebnisse dargestellt.

1 Vorbemerkungen

Um eine Quantencomputer zu realisieren benötigt man folgende Elemente:

- Präparation von Zuständen. Im Fall der linearen Optik können dies Einphotonenquellen sein, wie sie Johannes Otterbach bereits in seinem Vortrag vorgestellt hat. Eine Möglichkeit zur Präparation von verschrankten Zuständen wurde bereits von Klaus Huthmacher gezeigt.
- Messungen. Dazu werden in der linearen Optik Photodetektoren hoher Empfindlichkeit genutzt, die einzelne Photonen detektieren können. Wünschenswert sind auch Photonenzähler, die ein Photon von zwei Photonen unterscheiden können. Sie sind aber in der Praxis meist nicht verfügbar.
- Beliebige unitäre Operationen (Gatter) müssen in Abhängigkeit von den Messergebnissen angewendet werden können (Steuerung durch klassischen Rechner).
- Diese Gatter müssen *deterministisch* sein! Bei probabilistischen Gattern (das sind solche, bei denen man nur

Tabelle 1: Codierung optischer qubits in zwei Moden. qubit-Zustände sollen im Folgenden zur Unterscheidung von Modenzuständen fett gedruckt dargestellt werden. Die Bezeichnungen H und V müssen nicht notwendig für horizontale und vertikale Polarisation stehen. Der Zustandsraum der Moden ist sehr viel größer als der der qubits, so dass etwa Gatterfehler aus dem qubit-Raum herausführen können.

Zustand der Moden	zugeordneter qubit-Zustand
$ 1\rangle_H 0\rangle_V$	$ \mathbf{0}\rangle$
$ 0\rangle_H 1\rangle_V$	$ \mathbf{1}\rangle$
$ 0\rangle_H 0\rangle_V$	kein
$ 2\rangle_H 0\rangle_V$	kein

mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit < 1 eine korrekte Gatteroperation erhält, man weiß allerdings genau, wann dies der Fall war) geht die Wahrscheinlichkeit für ein versagen des Rechners exponentiell mit der Anzahl der qubits gegen 0.

Man kann zeigen, dass man alle n -qubit Gatter aus einer langsamer als exponentiell mit n wachsenden Zahl der folgenden zusammensetzen kann:

- Alle 1-qubit-Gatter wie etwa das Hadamard Gatter

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H^2 = 1 \quad (1)$$

- Ein 2-qubit-Gatter wie etwa

$$cnot = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad csig = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Dabei genügt wirklich ein 2-qubit Gatter, denn daraus lässt sich mittels 1-qubit Gattern jedes andere konstruieren. Es gilt etwa

$$H_2 \text{ } csig_{12} \text{ } H_2 = cnot_{12}. \quad (3)$$

1.1 Gatter in der linearen Optik

Alle 1-qubit Operationen lassen sich aus den Paulimatrizen zusammensetzen. Drückt man diese mit Hilfe der Erzeuger- und Vernichter-Operatoren der beiden Moden (siehe Tabel-

*maitre.physik.uni-kl.de/~muth/qi/handout.pdf – Folien zum Vortrag unter maitre.physik.uni-kl.de/~muth/qi/seminar.pdf

[†]Einführungen zu diesem Thema finden sich in [1] und [2]

le 1) aus, so erhält man die Schwinger-Darstellung:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= a_H^\dagger a_H - a_V^\dagger a_V \\ \mathbf{1} &= a_H^\dagger a_H + a_V^\dagger a_V \\ \sigma_x &= a_H^\dagger a_V + a_V^\dagger a_H \\ \sigma_y &= \frac{1}{i} (a_H^\dagger a_V - a_V^\dagger a_H)\end{aligned}\quad (4)$$

1-qubit Operationen lassen sich mit linearer Optik leicht deterministisch ausführen (siehe Beispiel des Strahlteilers unten).

Aufgrund der fehlenden Wechselwirkung zwischen den Photonen gilt dies für 2-qubit Gatter nicht. Es gilt sogar folgende

Aussage: Mit linearer Optik lässt sich kein deterministisches *cnot*-Gatter bauen.

Beweis: Zunächst stellen wir die Matrix der *cnot*-Operation aus Gleichung (2) mit Hilfe der Paulimatrizen dar:

$$\begin{aligned}U_{cnot} &= \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{1} + \sigma_z)^{(1)} \otimes \mathbf{1}^{(2)}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{1} - \sigma_z)^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \quad \quad = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5)$$

Mithilfe von $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ erhält man

$$= \dots = \exp \left\{ \alpha (\mathbf{1} - \sigma_z)^{(1)} (\sigma_x - \mathbf{1})^{(2)} \right\} \quad (6)$$

und durch einsetzen der Schwinger-Darstellung (4)

$$= \exp \left\{ \alpha (a_v^\dagger a_v)^{(1)} \left(a_H^\dagger a_v + a_v^\dagger a_H - \mathbf{1} \right)^{(2)} \right\}. \quad (7)$$

Hierin sind Erzeuger bzw. Vernichter in vierter Potenz enthalten. Linear optische Elemente sind aber von der Form

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \sum_{k,l} a_k^\dagger V_{kl} a_l \right\}, \quad V_{kl} = V_{lk}, \quad (8)$$

d.h. Erzeuger bzw. Vernichter treten höchstens quadratisch auf. (Sonst wären etwa Hamilton-Operatoren der Form $a_k^\dagger a_l a_m$ möglich, d.h. aus zwei Photonen niedriger Energie wird ein Photon hoher Energie erzeugt, siehe auch Vortrag von Klaus Huthmacher). Wir erhalten also einen Widerspruch.

□

Ein deterministisches 2-qubit-Gatter ist mit linearer Optik also nicht implementierbar! Im Folgenden wollen wir überlegen, wie man wenigstens ein fast deterministisches *cnot* bauen kann, also eines mit beliebig kleiner Fehlschlagswahrscheinlichkeit. Dazu werden wir in zwei Schritten vorgehen:

- Wie kann man wenigstens ein nicht-deterministisches *cnot* konstruieren?
- Wie kann man die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlschlag beliebig klein machen?

Dabei verfolgen wir einen Vorschlag von E. Knill, R. Laflamme und G.J. Milburn [3] (kurz KLM).

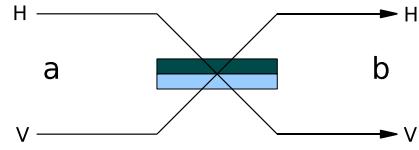


Abbildung 1: Der Strahlteiler - bei Transmission erfolgt kein Phasensprung, ebenso bei Reflexion an der dunkel dargestellten Seite, bei Reflexion an der hell dargestellten Seite erfolgt ein Phasensprung um π .

2 qubits und lineare Optik

Bevor wir uns dem Aufbau des KLM-*cnot*-Gatters widmen können, müssen wir uns zunächst zwei Bauelemente genauer anschauen, aus denen es aufgebaut ist: der Strahlteiler und das NS-“Gatter” (nonlinear sign shift).

2.1 Der Strahlteiler

Bekannt ist die Wirkung eines Strahlteilers (siehe Abbildung (1)) mit 50% Transparenz auf ein klassisches elektrisches Feld:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_H \\ \varepsilon_V \end{pmatrix} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_H + \varepsilon_V \\ \varepsilon_H - \varepsilon_V \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_H \\ \varepsilon_V \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Überträgt man dies direkt auf die qubit-Zustände, so erhält man

$$\begin{aligned}|\mathbf{0}\rangle &= |1\rangle_H |0\rangle_V \\ &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_H |0\rangle_V + |0\rangle_H |1\rangle_V) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathbf{0}\rangle + |\mathbf{1}\rangle),\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{1}\rangle &= |0\rangle_H |1\rangle_V \\ &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_H |0\rangle_V - |0\rangle_H |1\rangle_V) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathbf{0}\rangle - |\mathbf{1}\rangle).\end{aligned}\quad (11)$$

Der Strahlteiler implementiert also gerade die Hadamard-Transformation. Um die Wirkung auf nicht qubit-Zustände zu verstehen (die später ebenfalls auftreten werden), übertragen wir dies ins Heisenberg-Bild, indem wir zunächst die qubit-Zustände durch Vakuumzustand und Erzeuger-Operatoren darstellen.

$$a_H^\dagger |0\rangle_H |0\rangle_V = |1\rangle_H |0\rangle_V \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (b_H^\dagger + b_V^\dagger) |0\rangle_H |0\rangle_V \quad (12)$$

$$\Rightarrow a_H^\dagger \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (b_H^\dagger + b_V^\dagger)$$

$$\text{und analog } a_V^\dagger \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (b_H^\dagger - b_V^\dagger) \quad (13)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_H^\dagger \\ a_V^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_H^\dagger \\ b_V^\dagger \end{pmatrix} \quad (14)$$

Man erhält also eine analoge Matrix. Das folgende kleine Anwendungsbeispiel zeigt eine charakteristische Eigenschaft des Strahlteilers:

$$\begin{aligned}|1\rangle |1\rangle &\leftrightarrow \frac{1}{2} \left[(b_H^\dagger + b_V^\dagger) (b_H^\dagger - b_V^\dagger) \right] |0\rangle |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} (|2\rangle |0\rangle - |0\rangle |2\rangle)\end{aligned}\quad (15)$$

Fällt von beiden Seiten je ein Photon ein, so verlassen die beiden Photonen immer gemeinsam den Strahlteiler!

2.2 Das NS-“Gatter”

Das NS-“Gatter” ist kein Gatter im eigentlichen Sinn, da es nicht auf qubits wirkt, sondern nur auf eine einzelne Mode. Es soll das Vorzeichen des Zustands umkehren, genau dann, wenn die Mode genau zwei Photonen enthält, und sonst nichts tun. Wir beschränken uns auf maximal zwei Photonen:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle \mapsto \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle - \gamma|2\rangle \quad (16)$$

Das ist nicht mit linearer Optik machbar, was man schnell durch Widerspruch beweisen kann, und zwar erneut im Heisenberg-Bild:

$$|1\rangle \mapsto |1\rangle \Rightarrow a^\dagger = b^\dagger \Rightarrow |2\rangle \mapsto |2\rangle \neq -|2\rangle \quad (17)$$

Während das Hadamard Gatter also offensichtlich leicht deterministisch zu implementieren war, benötigen wir an dieser Stelle eine nicht-deterministische Implementation.

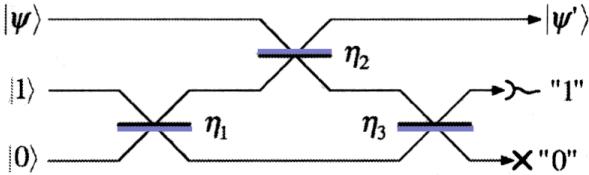


Abbildung 2: Das nicht-deterministische NS-Gatter. Eingegeben werden der unbekannte Zustand $|\Psi\rangle$ sowie zwei Ancillamoden im Zustand $|1\rangle|0\rangle$. Nur wenn sich die Ancillamoden auch am Ausgang wieder im Zustand $|1\rangle|0\rangle$ befinden, war die Operation erfolgreich. Die Reflexivitäten $\eta_2 = (\sqrt{2} - 1)^2$ und $\eta_1 = \eta_3 = \frac{1}{(4-2\sqrt{2})}$ [4] ergeben sich aus der im Text beschriebenen Rechnung.

Der Aufbau (siehe Abbildung 2) funktioniert nur dann, wenn in der oberen Ancillamode ein, in der unteren kein Photon detektiert wird. Wir berechnen für jeden der drei möglichen Eingangszustände die Wahrscheinlichkeitsamplitude C für dieses Messergebnis.

$$|\Psi\rangle = |0\rangle : C = \sqrt{\eta_1\eta_2\eta_3} + \sqrt{(1-\eta_1)(1-\eta_3)} \quad (18)$$

Der erste Summand berücksichtigt die dreimalige Reflexion des Ancillaphotons, der zweite die Transmission durch die Strahlteiler 1 und 3.

$$|\Psi\rangle = |1\rangle : C = -\sqrt{\eta_2}C + \sqrt{\eta_1\eta_3}(1-\eta_2) \quad (19)$$

Hier fordern wir die gleiche Amplitude. Der erste Summand berücksichtigt die Reflexion des Eingangsphotons an Strahlteiler 2, wodurch das Ancillaphoton wieder einen Faktor C wie in (18) beiträgt (gleicher Weg).

$$|\Psi\rangle = |2\rangle : -C = -\sqrt{\eta_2}C - \sqrt{\eta_1\eta_3\eta_2}(1-\eta_2) \quad (20)$$

Das Vorgehen ist hier analog, allerdings fordern wir das umgekehrte Vorzeichen, damit wir auch die gewünschte NS-Operation erhalten. Aus (18) bis (20) und der Forderung, dass C möglichst groß sein soll, erhalten wir die Werte von η_1 bis η_3 und $C = \frac{1}{2}$.

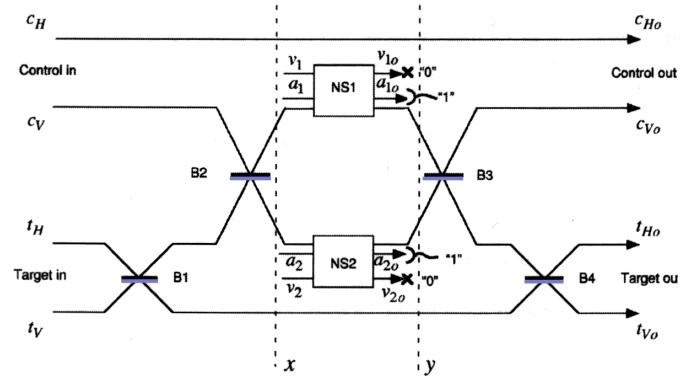


Abbildung 3: Das KLM *cnot*-Gatter [3]

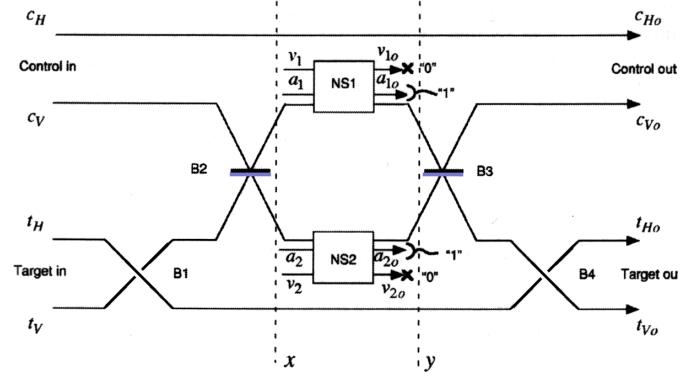


Abbildung 4: Das *csig*-Gatter

3 Das KLM *cnot*-Gatter

Laut Gleichung (3) stellt Abbildung 3 genau dann ein *cnot*-Gatter dar, wenn Abbildung 4 ein *csig*-Gatter darstellt. Betrachten wir also Abbildung 4 und folgende Fälle:

- control- und target-qubit im Zustand $|0\rangle$. Dann befinden sich sie Photonen in c_H und t_H und bemerken das Gatter somit nicht.
- Nur control- oder target-qubit im Zustand $|1\rangle$. Dann gelangt nur ein Photon zum Strahlteiler B2 und somit auch nur null oder ein Photon (bzw. eine Überlagerung dieser Zustände) zum jeweiligen NS-Gatter. Die NS-Gatter haben also keine Wirkung und B3 macht die Wirkung von B2 rückgängig.
- control- und target-qubit im Zustand $|1\rangle$. Dann gelangen zwei Photonen zu B2, und nach Gleichung (15) genau zu einem der NS-Gatter zwei Photonen. Dies ergibt den Vorzeichenwechsel.

Abbildung 3 stellt also ein *cnot*-Gatter dar, welches aber nur in $C^2 \cdot C^2 = \frac{1}{16}$ (zwei NS-Gatter) aller Fälle funktioniert, und sonst den Eingangszustand zerstört (der Ausgang ist dann nicht einmal mehr notwendig ein 2-qubit-Zustand, denn fehlgeschlagene NS-Messungen erhalten nicht notwendig die Photonenzahl der Moden).

4 Teleportation

Um das probabilistische KLM-Gatter nutzbar zu machen, verwenden wir ein Teleportationsprotokoll [3, 5]. Dazu wol-

len wir kurz das Prinzip der Quantenteleportation wiederholen (siehe auch Vortrag von Klaus Huthmacher).

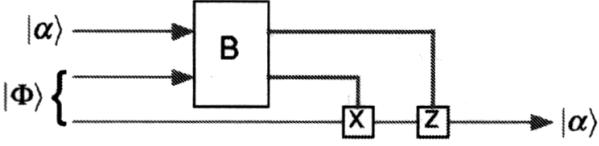


Abbildung 5: Prinzipieller Aufbau zur Teleportation eines qubits. B bedeutet die Bell-Messung. Die daraus gewonnene klassische Information dient zur Steuerung der eventuell notwendigen 1-qubit-Operationen X (steht für σ_x) und Z (steht für σ_z).

Abbildung 5 zeigt das Prinzip. Input ist das zu teleportierende qubit $|\alpha\rangle$ sowie zwei qubits $|\Phi\rangle$ in einem (an und für sich beliebigen) Bell-Zustand (zu dessen Präparation mittels nichtlinearen optischen Effekten siehe Vortrag von Klaus Huthmacher).

$$|\alpha\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle \quad |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle) \quad (21)$$

Die ersten beiden der drei qubits werden dann in der Bell-Basis

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle \pm |1\rangle|0\rangle), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle \pm |1\rangle|1\rangle) \quad (22)$$

gemessen. Beachtet man, dass sich der Gesamtzustand des Systems

$$|\alpha\rangle|\Phi\rangle \sim a(|110\rangle + |101\rangle) + b(|010\rangle + |001\rangle) \quad (23)$$

(ohne Normierung) schreiben lässt als

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle|\Phi\rangle \sim & (|01\rangle + |10\rangle)(b|0\rangle + a|1\rangle) \\ & + (|01\rangle - |10\rangle)(b|0\rangle - a|1\rangle) \\ & + (|11\rangle + |00\rangle)(a|0\rangle + b|1\rangle) \\ & + (|11\rangle - |00\rangle)(a|0\rangle - b|1\rangle), \end{aligned} \quad (24)$$

so sieht man, dass abhängig vom gemessenen Bell-Zustand (die alle immer mit gleicher Wahrscheinlichkeit gemessen werden) das dritte qubit auf einen Zustand projiziert wird, der sich mit Hilfe des bekannten Messergebnisses und 1-qubit-Operationen in $|\alpha\rangle$ überführen lässt. In unserem Fall dient die Teleportation aber gar nicht der Übermittlung von Quanteninformation über größere Entfernungen. Wir wollen ja "nur" unser $cnot$ verbessern.

Abbildung 6 zeigt zunächst den trivialen Fall. Nach den Bell-Messungen befinden sich die Ausgangs-qubits zunächst im Zustand $R|\alpha\rangle|\beta\rangle$. Die vom Messergebnis abhängigen 1-qubit-Rotationen R werden rückgängig gemacht ($\rightarrow |\alpha\rangle|\beta\rangle$) und schließlich unser $cnot$ angewendet ($\rightarrow cnot|\alpha\rangle|\beta\rangle$).

Ziehen wir also die $cnot$ -Operation vor die Teleportation! Abbildung 7 entnimmt man zunächst, dass die Reihenfolge von $cnot$ und Bell-Messung keine Rolle spielen kann, denn sie wirken auf verschiedene qubits. Nach der Bell-Messung liegen die Ausgangs-qubits also im Zustand $cnot R|\alpha\rangle|\beta\rangle$ vor. Man kann nun zeigen, dass für jedes Produkt aus Pauli-Matrizen R ein zweites R' existiert, so dass

$$cnot R|\alpha\rangle|\beta\rangle = R' cnot|\alpha\rangle|\beta\rangle. \quad (25)$$

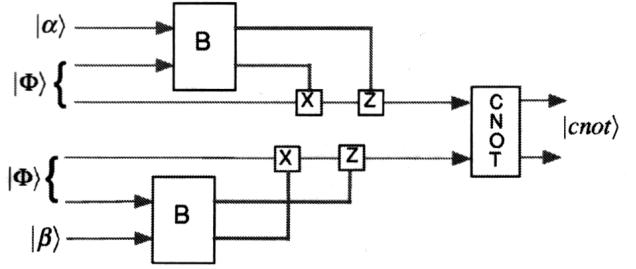


Abbildung 6: Wie lässt sich das KLM- $cnot$ (Wahrscheinlichkeits-) gewinnbringend mit der Teleportation in Verbindung bringen? So offensichtlich nicht.

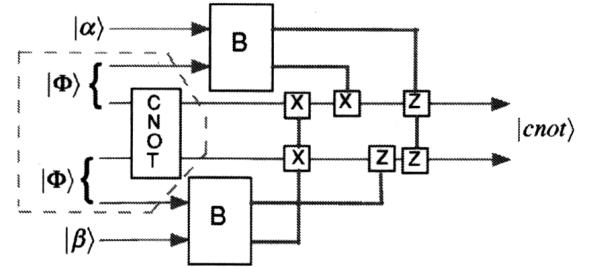


Abbildung 7: Zieht man die $cnot$ Operation vor die Bell-Messungen, so kann man den umrahmten Zustand so lange versuchen zu präparieren, bis man Erfolg hat, und erst dann das Teleportationsprotokoll anwenden. Beachte, dass die verbundenen X - bzw. Z -Gatter keine echtes 2-qubit-Gatter, sondern nur ein (einfach zu implementierendes) Produkt aus zwei 1-qubit-Gattern darstellen.

(Alle Operationen, welche Pauli-Gatter in Pauli-Gatter überführen bilden die Clifford-Gruppe [5] – Hadamard und $cnot$ gehören dazu.) R' lässt sich nun wieder eindeutig aus den Messergebnissen ableiten und man erhält am Ausgang $cnot|\alpha\rangle|\beta\rangle$.

Der Vorteil besteht nun darin, dass das $cnot$ so oft angewendet werden kann, bis es erfolgreich war. Der dann erhaltene Zustand (in Abbildung 7 umrahmt) kann dann aufbewahrt werden, bis der Eingangszustand $|\alpha\rangle|\beta\rangle$ ankommt. In der Praxis könnte man dies durch Delay-Lines realisieren, also langen aufgewickelten Glasfasern, die je nach Bedarf an ihren eigenen Anfang oder den Aufbau zur Bell-Messung angekoppelt werden. Mit einer immer funktionierenden Bell-Messung hätte man so ein deterministisches $cnot$. Allerdings schlägt auch die Bell-Messung in linearer Optik mit einer Wahrscheinlichkeit von P fehl:

- Klaus Huthmacher hat bereits einen einfachen Aufbau vorgestellt, mit dem man eine in $\frac{1}{4}$ der Fälle erfolgreiche Bell-Messung durchführen kann, d.h. man kann $P \leq \frac{3}{4}$ erreichen.
- D. Bouwmeester, J.W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter und A. Zeilinger [6] haben auch experimentell nachgewiesen (Aufbau siehe Abbildung 8), dass $P \leq \frac{1}{2}$ möglich ist.
- N. Lütkenhaus, J. Calsamiglia und K.-A. Suominen haben theoretisch gezeigt [7], dass man durch keinen Aufbau $P = 0$ erreichen kann.

Mit einem deterministischen $cnot$ könnt man im übrigen auch leicht eine deterministische Bell-Messung erreichen,

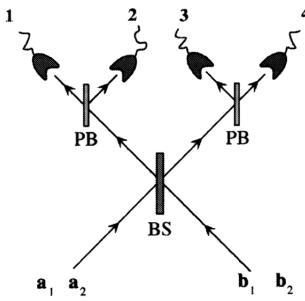


Abbildung 8: Aufbau nach [6] zur linear optischen Bell-Messung. Mithilfe der vier Photodetektoren, können zwei der vier Bell-Zustände eindeutig identifiziert werden.

denn ein *cnot* verwandelt die Bell-Zustände in einen leicht zu vermessende separable Zustände.

Man kann allerdings noch eine Reihe von Verbesserungen anbringen:

- Durch die Verwendung von n Bell-Paaren zur Teleportation anstelle von einem sinkt die Fehlschlagswahrscheinlichkeit der Teleportation (mit Bell-Messungen wie in Abbildung 8) von $\frac{1}{2}$ auf $\frac{1}{n+1}$ je zu teleportierendem qubit [8].
- Mit Hilfe der Quantenfehlerkorrektur (QEC; d.h. ein logisches qubit wird in mehrere physikalische qubits codiert, siehe etwa [1, 9]) lässt sich dieser nun kleine Fehler korrigieren, so dass kein all zu großes n notwendig ist.
- Daneben existieren Möglichkeiten, Bell-Messungen so durchzuführen, dass der Verlust von Photonen, eine häufige zusätzliche Fehlerquelle, detektiert wird [3].

5 Ein Experiment

5.1 Der prinzipielle Aufbau

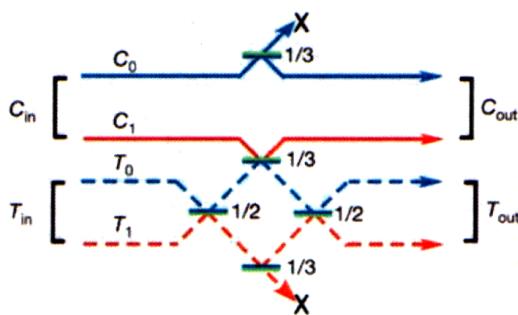


Abbildung 9: Ein alternatives *cnot* Gatter nach [10]. Es werden Strahlteiler sowohl mit Transparenz $\frac{1}{2}$ als auch $\frac{1}{3}$ eingesetzt. Eine erfolgreiche Operation findet genau dann statt, wenn in beiden Ausgangs-qubits koinzident ein Photon detektiert wird.

Die experimentelle Umsetzung der LOCQ steckt noch in den Anfängen. Anstelle des oben beschriebenen Vorgehens nach KLM [3] betrachten wir hier einen anderen Versuchsaufbau. Den Aufbau in Abbildung 9 wollen wir nicht im Detail auseinander nehmen. Er garantiert aber eine erfolgreiche *cnot*-Operation unter der Voraussetzung,

dass kein Photon durch den obersten oder untersten Strahlteiler entweicht, und auch nicht ein einzelnes durch den mittleren in das jeweils andere qubit wechselt. (Die Erfolgswahrscheinlichkeit liegt bei $\frac{1}{9}$.) Um das sicherzustellen, ist eine Koinzidenzmessung von je einem Photon in beiden qubits notwendig. Dies geschieht bei [10] destruktiv. Um die Photonen weiter verwenden zu können und ein zu KLM äquivalentes Gatter zu erhalten bräuchte man ein nicht-destruktives Messverfahren [11] (welches wieder mit einem deterministischen *cnot* gut zu machen wäre¹).

5.2 Implementation

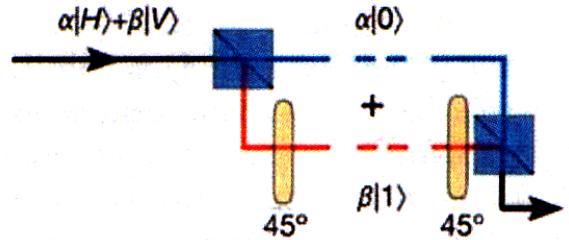


Abbildung 10: Zur Umwandlung von polarization encoding in spatial encoding und zurück. Die $\frac{\lambda}{2}$ -Platten sind gegenüber beiden Polarisationsrichtungen um 45° gedreht, um die Polarisation der Photonen um 90° zu drehen.

Bisher wurde spatial encoding für die qubits benutzt, d.h. die beiden zu einem qubit gehörenden Moden sind räumlich getrennt aber gleich Polariert. In [10] wird polarization encoding benutzt. Dabei unterscheiden sich die beiden Moden nur durch ihre Polarisierung, was sich vor allem bei der Präparation von Zuständen als Vorteilhaft zeigt. Die Umwandlung ist einfach (siehe Abbildung 10).

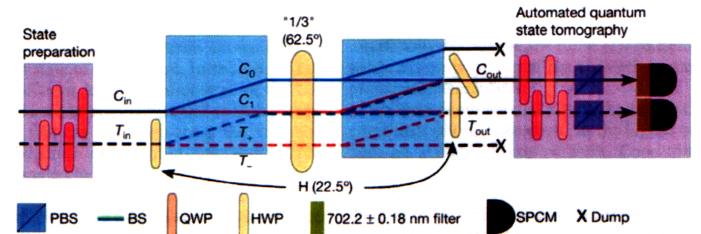


Abbildung 11: Versuchsaufbau nach [10]. Wie man sich schnell überlegt, tritt im polarization encoding ein $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen an die Stelle des Strahlteilers. Ein um $22.5^\circ = \frac{\pi}{8}$ gedrehtes $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen ersetzt gerade den 50%-Strahlteiler und implementiert somit die Hadamard-Transformation.

Man kann sich überlegen, dass der Versuchsaufbau in Abbildung 11 gerade mit Abbildung 9 übereinstimmt. Hier werden aber doppelbrechende Kristalle eingesetzt, um die Verschiedenen Polarisationsanteile verschieden abzulenken und entsprechend Abbildung 9 zu überlagern.

5.3 Ergebnisse

Durch passende Einstellung der Strahlteiler und $\frac{\lambda}{4}$ - bzw. $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen vor den Detektoren lassen sich die Ausgangszustände (Koinzidenz vorausgesetzt) in beliebiger

¹Zitat M. Fleischhauer

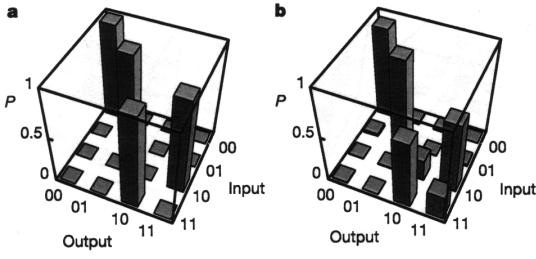
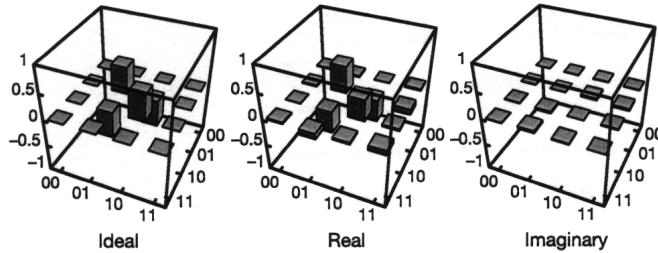


Abbildung 12: Wirkung des *cnot* auf Zustände in der computational basis. Angegeben sind die Amplitudenquadrate der einzelnen Komponenten. a) ideales *cnot* b) Messergebnisse

Basis messen. Die Ergebnisse für die vier verschiedenen Basiszustände zeigt Abbildung 12. Man erkennt die Grundsätzliche Funktionalität, wenn gleich auch noch erhebliches Rauschen vorhanden ist. Die Zustände mit control-qubit $|0\rangle$ werden besser verarbeitet, da hier die Interferenz am mittleren $\frac{1}{3}$ -Strahlteiler weg fällt.



$$\text{Eingang : } (|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle \xrightarrow{\text{cnot}} |0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle$$

Abbildung 13: Messergebnisse bei verschranktem Ausgangszustand. Dargestellt ist die Dichtematrix. Beim idealen *cnot* ist der Imaginärteil identisch Null.

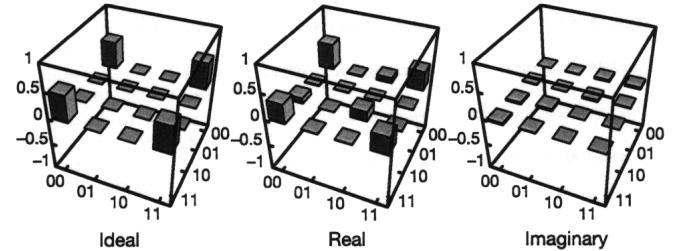
Eine charakteristische Eigenschaft des *cnot* ist es, verschrankte Zustände aus separablen zu erzeugen. Um diese vollständig zu vermessen wird das Verfahren der Quantentomographie benutzt [10]: Für den immer selben Eingangszustand wird der (als konstant angenommene) Ausgangszustand wiederholt in verschiedenen Basen gemessen, bis schließlich seine gesamte Dichtematrix bekannt ist. Die Ergebnisse sind von ähnlicher Qualität wie oben zeigen die Abbildungen 13 und 14. Beide Beispiele wurden mit dem exakt selben Aufbau gefunden, wodurch gezeigt werden soll, dass die Funktionalität nicht vom Eingangszustand abhängt. (Klar, denn das *cnot* soll ja schließlich auf jede Überlagerung, und somit auf alle Komponenten einer solchen gleichzeitig, wirken.)

6 Fazit

Zunächst haben wir gesehen, dass mittels linearer Optik, soviel Vorteile sie auch gegenüber anderen Methoden zum Bau von Quantencomputern haben mag, kein deterministisches 2-qubit-Gatter im eigentlichen Sinne erzeugen lässt.

Stattdessen mussten wir auf ein nicht-deterministisches *cnot* zurückgreifen und dieses mittels relativ aufwendigen Methoden der Teleportation und QEC aufmöbeln.

Zum Schluss durften wir uns davon überzeugen, dass der experimentelle Fortschritt auch auf diesem Gebiet (wie



$$\text{Eingang : } (|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \xrightarrow{\text{cnot}} |0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle$$

Abbildung 14: Dichtematrix bei einem anderen verschrankten Zustand.

in der Quanteninformation allgemein, abgesehen von der Quantenkryptographie - siehe dazu Vortrag von Sebastian Kühn) noch recht gering ist.

Literatur

- [1] Fleischhauer, M. Vorlesung zur Quanteninformation, TU Kaiserslautern, Sommersemester 2006
- [2] Steane, A. Quantum computing, Preprint quant-ph/9708022 v2 (arxiv.org) (1997)
- [3] Knill, E., Laflamme, R., Milburn, G. J. A scheme for efficient quantum computation using linear optics, Nature **409**, 46-52 (2001)
- [4] Ralph, T. C., White, A. G., Munro, W. J., Milburn, G. J. Simple scheme for efficient linear optics quantum gates, Physical Review A **65**, 012314 (2001)
- [5] Gottesman, D., Chuang, I. L. Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qbit operations, Nature **402**, 390-392 (1999)
- [6] Bouwmeester, D., Pan, J. W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H., Zeilinger A., Nature **390**, 575 (1997)
- [7] Lütkenhaus, N., Calsamiglia, J., Suominen, K.-A. Bell measurements for teleportation, Physical Review A **59**, 3295 (1999)
- [8] Knill, E., Laflamme, R., Milburn, G. Efficient Linear Optics Quantum Computation, Preprint quant-ph/0006088 v1 (arxiv.org) (2000)
- [9] Stein, B. Quantum Error Correction, www.tcs.informatik.uni-muenchen.de/lehre/SS03/Quanten/vorlaege/stein.pdf
- [10] O'Brien, J. L., Pryde, G. J., White, A. G., Ralph, T. C., Branning, D. Demonstration of an all-optical quantum controled-NOT gate, Nature **426**, 264-267 (2003)
- [11] Ralph, T. C., Barlett, S. D., O'Brien, J. L., Pryde, G. J., Wiseman, H. M. Quantum Non-demolishing Measurements on Qubits, Preprint quant-ph/0412149 v1 (arxiv.org) (2004)