

Quantenteleportation mit einzelnen Photonen

Klaus Huthmacher

30. April 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	3
2	Historischer Rückblick	3
3	Grundlagen der Quantenteleportation	3
4	Technische Realisierung	5
4.1	EPR Source	5
4.2	Bell - Zustands - Messung	6
5	Das Experiment	7
5.1	Experimental Quantum Teleportation	7
5.2	Experimentelle Realisierung - Teil I	7
5.3	Experimentelle Realisierung - Teil II	9

1 Motivation

Die Motivation der Quantenteleportation besteht darin, dass zwei Parteien namens Alice und Bob existieren, die einen (unbekannten) Quantenzustand austauschen möchten. Dieser Austausch stellt im Grunde nichts anderes als eine Übertragung von Informationen dar, die mit dem Zustand des System identifiziert werden können.

Nach ersten Überlegungen bieten sich dazu zwei Möglichkeiten an:

- Alice bringt den Zustand direkt zu Bob. D.h. überspitzt ausgedrückt, sie packt ihre Aufbauten ein, fährt mit diesen zu Bob und präsentiert sie dort.
- Alice kann den Quantenzustand auch messen und die Ergebnisse an Bob übermitteln.

So intuitiv diese beiden Ideen auch sind, so sind deren Ausführungen kompliziert bis unmöglich.

Was den ersten Punkt angeht, so wäre der *physikalische Transport* ein sehr aufwändiges Unterfangen. Ein Quantenzustand ist sehr anfällig auf geringe Störungen und jede Unachtsamkeit würde ihn zerstören. Die Vorstellung den Aufbau in Watte zu packen und zu transportieren ist also sehr naiv und wäre nicht von Erfolg gekrönt.

Auch die zweite Idee hat ihre Probleme. Im Gegensatz zur ersten ist diese allerdings weniger mit technischen Schwierigkeiten verbunden, sondern mit den Grundprinzipien der QM. Dies liegt im Kern darin, dass es durch die Unschärferelation nicht möglich ist einen Quantenzustand vollständig zu messen. Weiterhin würde eine Messung den Zustand selbst zerstören. Also nicht nur, dass Alice nicht alle Informationen an Bob übermitteln könnte, sie würde ihren Zustand zusätzlich auch noch verlieren.

Der Lösung des Problems sei diese Ausarbeitung gewidmet: *Die Quantenteleportation*.

2 Historischer Rückblick



Abbildung 1: Charles H. Bennett

An dieser Stelle ein historischer Rückblick über die Idee der Quantenteleportation. Es war kein geringerer als Charles H. Bennett, der sich von der scheinbaren Unmöglichkeit des Unterfangens durch die Grundfeste der QM, nicht abschrecken ließ. Ihm war wohl bewußt, dass bei der Messung eines Quantenzustands, dieser auf seine Basis projiziert wird und anschließend in einen Eigenzustand übergeht. Und genau diesen Aspekt, den die vollständige Messung eines Quantenzustands unmöglich machte, erhob er zur Grundlage der Quantenteleportation.

Allerdings ging das nicht ohne eine weitere Zutat in Form von zwei verschränkten Teilchen, die sich Alice und Bob teilen mussten:

$$|\Psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B) \quad (1)$$

3 Grundlagen der Quantenteleportation

Ausgegangen wird im Folgenden von einem ursprünglichen (*O*: origin) Quantenzustand, der als Superposition von zwei möglichen Zuständen dargestellt wird. Dies kann z.B. bei einem Elektron der Spin sein oder bei einem Photon die Polarisation.

$$|\Psi\rangle_O = \alpha|0\rangle_O + \beta|1\rangle_O \quad (2)$$

Nachdem wir den Quantenzustand nun mathematisch beschrieben haben, müssen wir uns noch Gedanken über den Begriff der Verschränkung machen. Salopp formuliert, stellt eine Verschränkung nichts weiter als eine *Superposition* von zwei Zuständen dar. Bei der Präsentation der technischen Realisierung und somit auch der Herstellung von verschränkten Zuständen soll dieser Begriff klarer werden.

Wie auch für den zu übermittelnden Quantenzustand stellt sich nun die Frage, wie ein verschränkter Zustand dargestellt werden soll. In diesem Fall ist das mathematische Gerüst die sogenannte *Bell Basis*, die wie folgt aussieht:

$$|\Psi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B + |1\rangle_A|0\rangle_B) \quad (3)$$

$$|\Psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B) \quad (4)$$

$$|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B) \quad (5)$$

$$|\Phi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B - |1\rangle_A|1\rangle_B) \quad (6)$$

Nachdem wir also nun gesehen haben, wie wir den ursprünglichen sowie einen verschränkten Zustand darstellen, können wir uns das Teleportationsprotokoll näher ansehen. Dabei sind die Ausgangsbedingungen wie folgt:

- Alice besitzt das ursprüngliche Teilchen (Index O)
- Alice besitzt eins der beiden verschränkten Teilchen (Index A)
- Bob besitzt ebenfalls eines der beiden verschränkten Teilchen (Index B)

Die ganze Situation lässt sich im Folgenden als einen Zustand mit drei beteiligten Teilchen formulieren:

$$|\Psi\rangle_{OAB} = |\Psi\rangle_O \otimes |\Psi\rangle_{AB} \quad (7)$$

Und durch einfügen von geschickten Nullen sieht dieses System in der Bell - Basis wie folgt aus:

$$= \frac{1}{2} \left(|\Phi^+\rangle_{OA} \otimes (\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B) \right. \quad (8)$$

$$+ |\Phi^-\rangle_{OA} \otimes (\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B) \quad (9)$$

$$- |\Psi^+\rangle_{OA} \otimes (\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) \quad (10)$$

$$\left. - |\Psi^-\rangle_{OA} \otimes (\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \right) \quad (11)$$

$$(12)$$

Im weiteren Verlauf des Teleportationsprotokoll führt Alice nun eine sogenannte Bell - Messung aus, d.h. sie projiziert ihre beiden Teilchen in eine der vier gegebenen Bell - Zustände, z.B.

$$|\Psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B) \quad (13)$$

Als nächstes teilt Alice über einen klassischen Kanal das Ergebnis ihrer Messung an Bob mit:

$$|\Psi^-\rangle_{OA} \otimes (\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \quad (14)$$

Bob führt schließlich die entsprechende unitäre Transformation aus. In diesem Fall ist das nur die Identität und kommt auf folgenden Zustand:

$$\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B \quad (15)$$

Und dies ist der Zustand, den Alice ursprünglich besaß.

4 Technische Realisierung

4.1 EPR Source

Wie sich bisher gezeigt hat, stellen verschränkte Zustände einen wichtigen Bestandteil der Quantenteleportation dar. Es stellt sich also die Frage wie diese besondere Art von Teilchen erzeugt werden.

Der Schlüssel liegt in der sogenannten *Parametric - Down - Conversion*:

Man nimmt einen Kristall aus β - Bariumborat, richtet ihn geeignet aus, schießt ein blaues Photon hinein, und bekommt zwei rote Photonen heraus.

Bei diesem Prozess gilt es zwei Erhaltungssätzen gerecht zu werden.

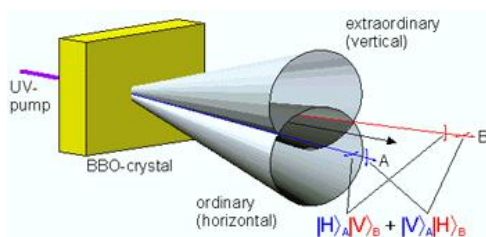
Zum einen ist dies die Energie - Erhaltung, die sich durch aufsummieren der einzelnen Energiebeiträge als recht einfach gestaltet:

$$\begin{aligned}\hbar\omega_{blau} &= \hbar\omega_{rot} + \hbar\omega_{rot} \\ \Rightarrow \omega_{blau} &= \omega_{rot} + \omega_{rot} \\ \Rightarrow \omega_{blau} &= 2 \cdot \omega_{rot}\end{aligned}$$

Als interessanteren Teil gestaltet sich die Impulserhaltung, in die der Brechungsindex des nichtlinearen Materials eingeht. Vorab zwei Gleichungen zum besseren Verständnis:

$$\begin{aligned}\vec{k} &= \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot |\vec{k}| = \hat{k}|\vec{k}| \quad \text{mit} \quad |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}n(\omega) \\ \Rightarrow \vec{k}_{blau} &= \hat{k}_{blau} \frac{\omega_{blau}}{c} n(\omega_{blau}) \quad \text{und} \quad \vec{k}_{rot} = \hat{k}_{rot} \frac{\omega_{rot}}{c} n(\omega_{rot}) \\ \text{Impulserhaltung fordert:} \quad \hbar \cdot \vec{k}_{blau} &= \hbar \cdot \vec{k}_{rot}^1 + \hbar \cdot \vec{k}_{rot}^2 \\ \Rightarrow \hat{k}_{blau} \frac{\omega_{blau}}{c} n(\omega_{blau}) &= \hat{k}_{rot}^1 \frac{\omega_{rot}^1}{c} n(\omega_{rot}^1) + \hat{k}_{rot}^2 \frac{\omega_{rot}^2}{c} n(\omega_{rot}^2)\end{aligned}$$

Es zeigt sich also, dass die Impulserhaltung durch den beteiligten Brechungsindex nicht trivial erhalten ist, da der Brechungsindex durch die Dispersion bedingt für die verschiedenen Photonen unterschiedlich ausfällt.



Eine anschauliche Lösung ist durch zwei sich überschneidende Kegel gezeigt. In diesem Bild steht jeweils ein Kegelmantel für die Menge aller Impulse \vec{k}_1 oder \vec{k}_2 , welche die beiden austretenden Photonen besitzen können, um der Impulserhaltung gerechnet zu werden.

In diesem Bild zählen zwei Photonen nun als verschränkt, sobald sie in Richtungen emittiert werden, in denen sich die Kegel überschneiden. Auf der rechten Seite sind nun drei verschiedene Lösungen der Impulserhaltung gezeigt, in Form eines blauen, grünen und roten Kreise. Diese stellen die Frontsicht auf die oben beschriebenen Kegel dar.

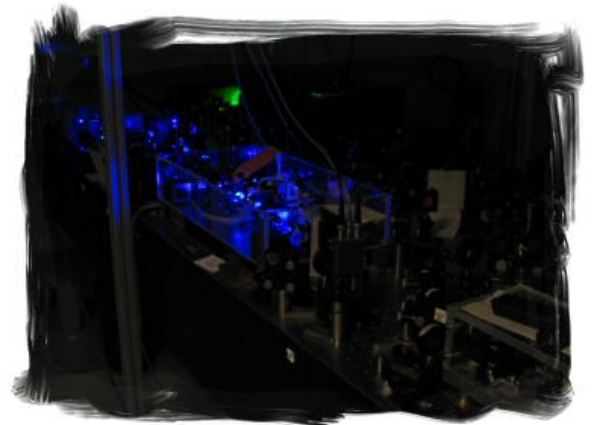
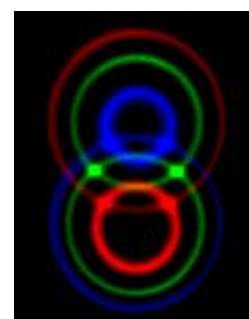
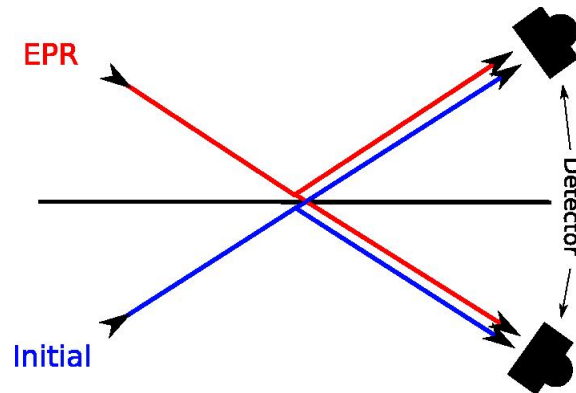


Abbildung 2: EPR Source

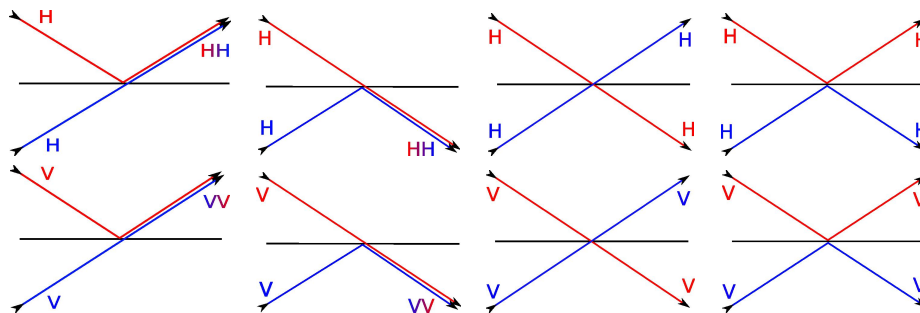


4.2 Bell - Zustands - Messung

Um eine Bell-Zustands-Messung durchzuführen werden zwei Photonen von verschiedenen Seiten auf einen halbdurchlässigen Spiegel geschickt. Das eine Photon stellt dabei den Ursprungszustand dar, den es zu teleportieren gilt; das andere Photon ist eins der beiden verschränkten Teilchen, dass sich Alice mit Bob teilen.

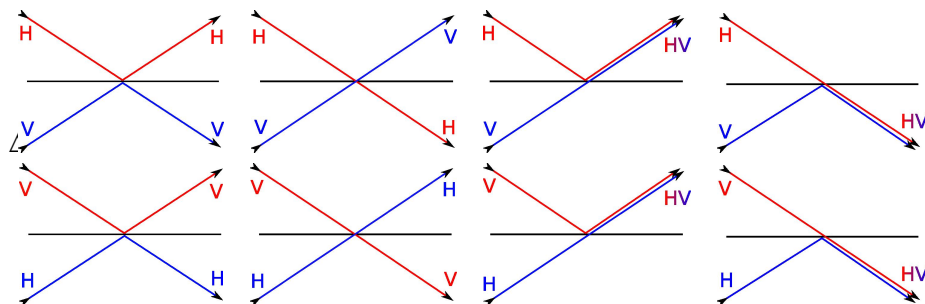


Nun gilt es die verschiedenen Fälle durchzusehen, die bei dieser Anordnung auftreten können. In der Graphik stehen jeweils *H* für *horizontal* und *V* für *vertikal* und gibt die Polarisation des Photons an. Treffen z.B. zwei Photonen gleicher Polarisation auf den Strahlteiler, so ist ein möglicher Ausgang, dass beide Photonen den Strahlteiler auf der gleichen Seite verlassen. Dass, analog zur Ausgangssituation, wieder jeweils ein Photon auf einer Seite herauskommt ist durch den sogenannten *Hong-Ou-Mandel Effekt* verboten. Dieser Sachverhalt ist durch die folgende Graphik dargestellt:



Wie oben beschrieben sind im Rahmen der Kombinatorik die vier rechten Fälle möglich, jedoch physikalisch nicht zu beobachten. Sie tragen also nichts zur Gesamtzahl aller möglichen Ausgänge bei. Warum diese Fälle an dieser Stelle dennoch aufgezeigt sind, wird später ersichtlich.

Treffen die beteiligten Photonen jedoch mit verschiedenen Polarisationen auf den Strahlteiler so findet keine Interferenz statt und der oben beschriebene Effekt kann nicht eintreten. Mit anderen Worten, die Ausgänge sind rein kombinatorisch zu erschließen.



Um nun über eine erfolgreiche Bell - Messung zu reden, fassen wir den obigen Sachverhalt noch einmal zusammen.

Insgesamt sind durch Einstrahlung Photonen gleicher bzw. verschiedener Polarisation 16 Ausgänge möglich.

Eine Bell - Messung ist allerdings nur dann erfolgreich, wenn beide Detektoren ein Photon detektieren, d.h. konkret jeweils ein Photon eine Seite des Strahlteilers verlässt. Dies sind 8 der 16 möglichen Fälle. Nun muss allerdings berücksichtigt werden, dass von diesen 8 Fällen die Hälfte physikalisch nicht möglich sind, da durch den *Hong-Ou-Mandel Effekt* verboten.

Also führen von 16 möglichen Ausgängen nur 4 zu einer erfolgreichen Messung, was zu dem Ergebnis führt:

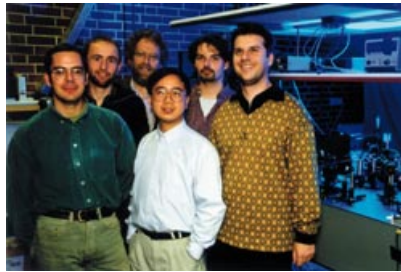
Von allen betrachteten Fällen lässt dies den ernüchternden Schluss zu, dass eine Bell-Messung nur in 25% aller Fälle erfolgreich ist

5 Das Experiment

5.1 Experimental Quantum Teleportation

Institut für Experimentalphysik, Universität Innsbruck, Österreich 1997

Dik Bouwmeester, Harald Weinfurter, Prof. Zeilinger, Jian – Wei Pan, Manfred Eibl, Klaus Mattle

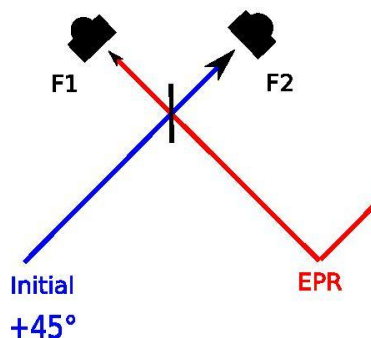


5.2 Experimentelle Realisierung - Teil I

Bisher wurde geklärt wie das Teleportationsprotokoll in der Theorie funktioniert und sogar geklärt, wie die einzelnen Bestandteile technisch realisierbar sind. Es wurde jedoch noch keine Aussage darüber gemacht, wie schwer sich die Umsetzung der Theorie gestaltet.

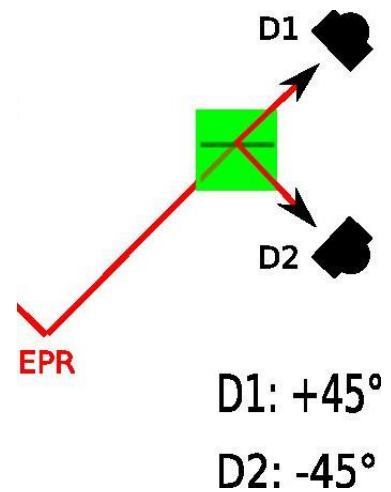
An dieser Stelle sei gesagt, dass die Erzeugung und Messung von verschränkten Zuständen die größte Herausforderung darstellt. Nicht nur, dass es sich als problematisch gestaltet, es kommt noch hinzu, dass es technisch nicht möglich ist alle vier Bell - Zustände eindeutig zu identifizieren.

Zur Beruhigung kann jedoch gesagt werden, dass das oben beschriebene Verfahren tatsächlich funktioniert und die Erzeugung von verschränkten Zuständen somit grundsätzlich möglich ist. Außerdem ist es immerhin möglich in zwei der vier Bell - Zustände zu projizieren.

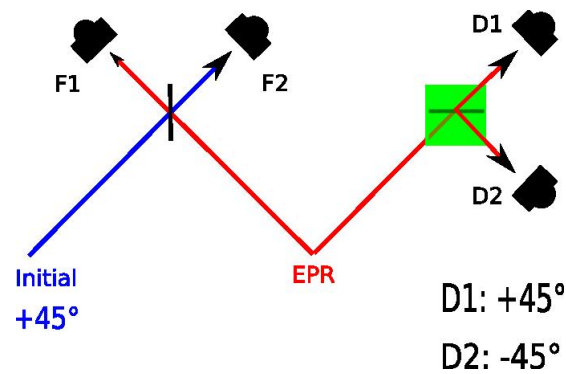


Im Labor galt es nun den ursprünglichen Quantenzustand in Form eines Photons, das 45° polarisiert ist zu teleportieren. Laut Teleportationsprotokoll ist der erste Schritt die Bell - Messung bei der das Photon zusammen mit dem verschränkten Teilchen von Alice, in diesem Fall ebenfalls ein Photon, auf dem Strahlteiler geschickt wird. Wie oben beschrieben ist die Bell - Messung genau dann erfolgreich, wenn jeweils ein Photon eine Seite des Strahlteilers verlässt. Dieser Vorgang geschieht also dann, wenn Detektor F1 und F2 eine Koinzidenz detektieren.

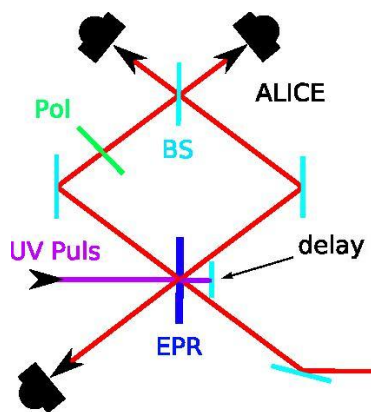
Auf Bob's Seite sollte sein verschränktes Teilchen nun ebenfalls zu 45° polarisiert sein. Dieser schickt also sein Teilchen durch einen sogenannten Polarisations-Strahlteiler, an dessen Ausgang die beiden Detektoren $D1$ und $D2$ auf $+45^\circ$ bzw. -45° eingestellt sind. Bei einer erfolgreichen Teleportation ist also eine Detektion bei $D1$ zu erwarten.



Die Gesamtheit der beiden Prozesse auf Alice' bzw. Bob's Seite seien an der folgenden Graphik noch einmal verdeutlicht. Eine erfolgreiche Teleportation hat also genau dann stattgefunden, wenn eine Koinzidenz von Detektor $F1$, $F2$ und $D1$ registriert wird



5.3 Experimentelle Realisierung - Teil II



An dieser Stelle scheint das Teleportationsprotokoll experimentell erfolgreich realisiert worden zu sein. Dies ist soweit auch richtig, jedoch muss noch ein Sachverhalt berücksichtigt werden. Und zwar derjenige, dass auf der einen Seite eine erfolgreiche Teleportation stattgefunden hat und auf der andere Seite eine Koinzidenz durch eine zufälliges Ereignis, dass das gleiche Ergebnis hervorbringt.

Zu diesem Zweck hat sich die Gruppe einen ganz raffinierten Trick einfallen lassen, indem sie die Photonen bei der Bell-Messung zeitlich verzögert an den Strahlteiler ankommen ließ. Der Sinn dieses Zusatzes bestand darin den oben genannten *Hong Ou-Mandel Effekt* als Kriterium für eine erfolgreiche Bell-Messung zu nutzen. Gehen wir von dem ursprünglichen Fall aus, dass Photonen mit gleicher Polarisierung den Strahlteiler gleichzeitig erreichen, so findet Interferenz statt und der eben genannte Effekt verbietet die Ausgangssituation, dass die Photonen jeweils eine Seite des Strahlteilers verlassen. Sind die beiden Photonen umgekehrt jedoch zeitlich so stark verzögert, dass sie nicht mehr interferieren können, so ist dieser Ausgang durchaus möglich. Zu berücksichtigen ist allerdings die wichtige Tatsache, dass eine so starke zeitliche Verzögerung für die Photonen immer noch eine Gleichzeitigkeit für die beiden Detektoren $F1$ und $F2$ bedeutet.

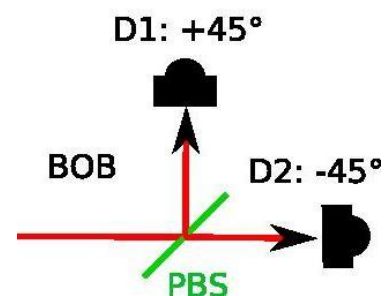
Erinnern wir uns nun zurück an die Anzahl der Fälle, die eintreten können, so waren dies insgesamt 16. Für eine erfolgreiche Zustandsmessung müssen jedoch die Photonen beide Seiten des Strahlteilers verlassen, womit sich die Anzahl der Fälle auf 8 reduziert hat.

Und an dieser Stelle findet im Gegensatz zu oben keine weitere Reduzierung statt, der *Hong Ou-Mandel Effekt* kann durch die zeitlich starke Verzögerung nicht eintreten.

Somit ist die Chance einer vermeintlich erfolgreichen Bell - Messung von 25% auf 50% gestiegen.

Betrachtet man nun Bob's Seite und geht von einem unpolarisierten Photon aus, dass den Polarisations-Strahlteiler erreicht, so wird auf jeden Fall in 50% aller Fälle eine Polarisierung von $+45^\circ$ detektiert.

Fassen wir die bisherigen Erkenntnisse noch einmal zusammen. Auf Alice' Seite findet durch rein zufällige Prozesse in der Hälfte der Fälle eine erfolgreiche Bell - Messung statt. Davon findet auf Bobs Seite in nochmal der Hälfte der Fälle eine Detektion der Polarisierung von $+45^\circ$ statt.



Zusammengefasst bedeutet dies, dass allein durch zufällige Ereignisse in 25% aller Fälle eine Koinzidenz von Detektor $F1$, $F2$ und $D1$ registriert wird.

Es gilt also zu zeigen, dass ein Zusammenhang zwischen den Messungen bei Alice und Bob herrscht. Zu diesem Zweck wird wie folgt vorgegangen.

Wir haben gesehen, dass bei einer zeitlichen Verzögerung der beiden beteiligten Photonen auf Alice Seite dennoch eine Koinzidenz registriert werden kann, die eine erfolgreiche Bell-Messung vortäuscht. Auf Bobs Seite führt ein unpolarisiertes Photon in der Hälfte der Fälle zu einer Registrierung von $+45^\circ$ und umgekehrt für -45° . Mit anderen Worten, die Messung einer $+45^\circ$ bzw. -45° Polarisierung ist für beide Fälle gleich groß, nämlich 25%.

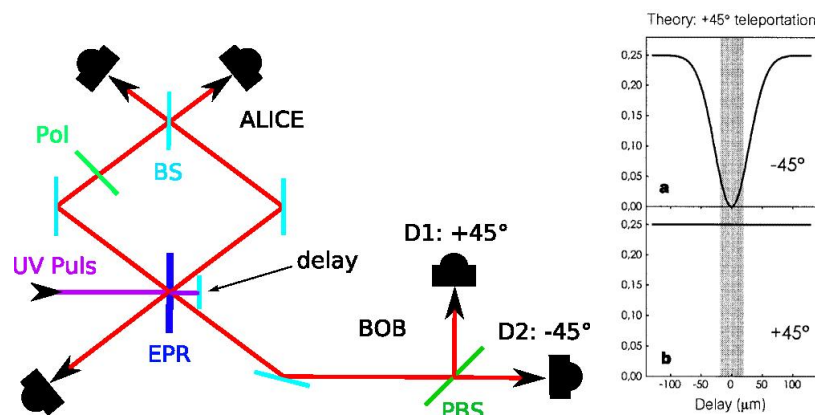
Wird nun die zeitliche Verzögerung der beiden Photonen verkleinert, so tritt der oben genannte *Hong*

Hong Ou-Mandel Effekt ein. Eine registrierte Koinzidenz von Detektor $F1$ und $F2$ stellt tatsächlich eine erfolgreiche Bell-Messung dar. Dies bedeutet für Bobs Seite, dass das verschränkte Photon eine Polarisation von $+45^\circ$ einnimmt.

Soweit ist dies bisher klar und einleuchtend. Um die gewünschte Korrelation zwischen Alice und Bob nun aber zu begründen ist in diesem Fall viel wichtiger, was auf Bobs Seite *nicht* passiert. Nämlich ein Ereignis bei Detektor $D2$, der für eine Polarisation von -45° steht.

Der gesamte Sachverhalt mit den theoretischen Erwartungen sei in der folgenden Graphik noch einmal dargestellt. Dabei sind die theoretischen Überlegungen als Wahrscheinlichkeit über den zeitlichen Delay aufgetragen. Die Verzögerung wird wie in der Skizze gezeigt über die Delay - Line geregelt.

Wie oben beschrieben findet allein durch zufällige Ereignisse, also bei einer sehr großen zeitlichen Verzögerung, zu jeweils 25% eine Detektion an Detektor $D1$ bzw. $D2$ statt (in der rechten Graphik ganz links respektive rechts auf der Delay-Achse). Wird der Spiegel nun so eingestellt, dass die beiden Photonen gleichzeitig den Strahlteiler erreichen, so können sie bei gleicher Polarisation interferieren und es tritt der *Hong Ou-Mandel Effekt* ein. Dies bedeutet nun, dass bei einer Koinzidenz von Detektor $F1$ und $F2$ tatsächlich eine erfolgreiche Bell - Messung stattgefunden hat und das verschränkte Photon auf Bobs Seite tatsächlich eine Polarisation von $+45^\circ$ inne hat. Und somit *nicht* zu -45° polarisiert ist. D.h. konkret im sogenannten *Teleportationsbereich* muss die Wahrscheinlichkeit einer Detektion an $D2$ zurückgehen.



Und zu guter Letzt noch der Vergleich zwischen den theoretischen Erwartungen und den Messergebnissen.

Ganz links wieder die theoretischen Erwartungen bei einer vorgegeben Polarisation des zu teleportierenden Photons von $+45^\circ$.

Rechts daneben sogleich die Messwerte der Arbeitsgruppe. Es ist sehr deutlich zu erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit einer Detektion an $D2$ im Teleportationsbereich fast auf 0 zurückgeht.

Im äußersten rechten Bild wurde der Sachverhalt gerade umgedreht. Dazu wurde ein Photon teleportiert, dass zu -45° polarisiert ist. Somit sind die Erwartungen an dieser Stelle, dass Detektor $D1$ im Teleportationsbereich weniger misst, auch hier voll erfüllt.

