

- Drehmoment auf Ladungsverteilung im externen Feld
lokalisiert bei $\vec{r}_0$

$$\vec{M} = \int dV \rho(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) = \vec{p} \times \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) \quad \text{lokalisierte Ladungsverst.}$$

Bspl: Kraft und Drehmoment auf Dipole $\rightarrow$ Ü.A.

II. 4. Lösung der Laplace und Poissonsgleichung durch Separation, Multipolentwicklung

$$\Delta \phi(\vec{r}) = \begin{cases} -\rho/\epsilon_0 & \text{Poissongl.} \\ 0 & \text{Laplacegleichung} \end{cases}$$

(a) Prinzip der Separation

partielle DGL $\longrightarrow$ gewöhnliche DGL
Separationsansatz

$$\phi(\vec{r}) = \phi(q_1, q_2, q_3) = A(q_1) B(q_2) C(q_3)$$

Wahl der Koordinaten problemabhängig

Bspl: kartesische Koordinaten

$$\phi = X(x) Y(y) Z(z)$$

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi \stackrel{!}{=} 0$$

wenn $\phi \neq 0$

$$\frac{1}{\phi} \Delta \phi = \underbrace{\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}}_{\substack{\text{unabhängig} \\ \text{von } y, z}} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2}}_{x, z} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}}_{x, y} = 0$$

alle 3 Terme müssen konstanten sein!

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

somit lösbar, z.B. α^2, β^2 positiv

$$\begin{aligned} X(x) &: \{e^{+i\alpha x}, e^{-i\alpha x}\} \\ Y(y) &: \{e^{+i\beta y}, e^{-i\beta y}\} \\ Z(z) &: \{e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}, e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}\} \end{aligned}$$

$$\phi_{\alpha\beta}(x, y, z) = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$$

$\phi_{\alpha\beta}$ vollständiges ONS + Superpositionsprinzip

$$\phi(x, y, z) = \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta}(x, y, z)$$

(b) Separation in Kugelkoordinaten

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{u(r)}{r} P(\cos \vartheta) Q(\varphi)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Bem: • $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \phi$

• $\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x}$
mit $x = \cos \vartheta$

$$\Delta \phi = \frac{PQ}{r} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{uQ}{r^3} \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP}{dx} + \frac{uP}{r^3 (1-x^2)} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

• $\frac{r^3 (1-x^2)}{uPQ} \Bigg|$

$$0 = \frac{r^2 (1-x^2)}{u} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{(1-x^2)}{P} \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP}{dx} + \underbrace{\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2}}_{=-m^2}$$

$$Q''(\varphi) + m^2 Q(\varphi) = 0$$

$$\boxed{Q(\varphi) = e^{im\varphi}}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{da } Q(\varphi + 2m\pi) \stackrel{!}{=} Q(\varphi)$$

$$\underbrace{\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2}}_{f(r)} + \underbrace{\frac{1}{P} \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP}{dx} - \frac{m^2}{(1-x^2)}}_{f(x)} = 0$$

$$= \ell(\ell+1)$$

$$\Rightarrow U'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} U = 0$$

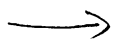
$$U_\ell(r) = A r^{\ell+1} + B r^{-\ell}$$

es bleibt

$$\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right] P = 0$$

zugeordnete Legendresche Differentialgleichung

S-VL
30.4.02



Legendre Differentialgleichung $m=0$

$$(1-x^2) P'' - 2x P' + \ell(\ell+1) P = 0$$

Ansatz: $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $-1 \leq x \leq 1$
($x = \cos \theta$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[a_{k+2} (k+2)(k+1) - a_k (k-1)k - 2k a_k + \ell(\ell+1) a_k \right] x^k = 0$$

Koeffizientenvergleich liefert Rekursion

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \ell(\ell+1)}{(k+2)(k+1)} a_k$$

$$a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_6 \text{ etc.}$$

$$a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow a_7 \text{ etc.}$$

- falls l natürliche Zahl und $a_1 = 0$ (l gerade)
oder $a_0 = 0$ (l ungerade)

Abbruch der Rekursion

$\Rightarrow$ Legendrepolynome

- l gerade: $a_0 \stackrel{!}{=} 1, a_1 = 0$

$$P_0(x) = 1 \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

- l ungerade: $a_0 = 0, a_1 \stackrel{!}{=} 1$

$$P_1(x) = x \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

Eigenschaften der Legendrepolynome

(i) Orthogonalität

$$(P_l, P_{l'}) = \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

(ii) Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(x') = \delta(x-x') \quad -1 \leq x, x' \leq 1$$

die Funktionen $\sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x)$ bilden ein vollständiges ONS auf $-1 \leq x, x' \leq 1$

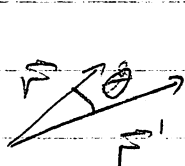
(iii) Rekursionsformeln

$$P_{l+1}' - P_{l-1}' - 2(l+1) P_l = 0$$

$$(l+1) P_{l+1} - (2l+1)x P_l + l P_{l-1} = 0$$

(iv) erzeugende Funktion

$$\boxed{\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta)}$$



$\theta \angle (\vec{r}, \vec{r}')$

$$r_{<} = \min(r, r')$$

$$r_{>} = \max(r, r')$$

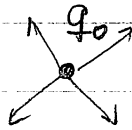
axialsymmetrische Probleme

keine Abhängigkeit von φ d.h. $m=0$

$$\boxed{\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta)}$$

Beispiele

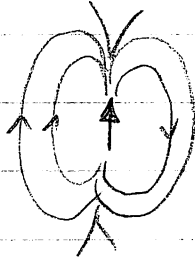
- Monopol



$$A_e \equiv 0$$

$$B_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}, \quad B_e \equiv 0 \quad e > 0$$

- Symmetrischer Punktdipol



$$A_e \equiv 0$$

$$B_0 = 0, \quad B_1 = \frac{P}{4\pi\epsilon_0}, \quad B_e \equiv 0 \quad e > 1$$

$$\vec{P} = P \vec{e}_z$$

- Symmetrischer Punktquadrupol

$$A_e \equiv 0$$

$$B_0 = B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}, \quad B_e \equiv 0 \quad e > 2$$

Kugelflächenfunktionen ($m \neq 0$)

$$(1-x^2)P'' - 2xP' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0$$

Zugeordnete Legendrefunktionen

$$P_e^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_e(x)$$

Eigenschaften

• Symmetrie $P_e^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_e^m(x)$

• Orthogonalität
für festes m $\int_{-1}^1 dx P_e^m(x) P_e^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ee'}$

Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_e^m(\cos\vartheta) e^{im\varphi}$$

$$m = -l, -(l-1), \dots, (l-1), l$$

Eigenschaften:

• Symmetrie $Y_{e,-m} = (-1)^m Y_{em}^*$

• Orthogonalität

$$\int d\Omega Y_{e'm'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{em}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ee'} \delta_{mm'}$$

wobei $\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta$

• Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta')$$

$$l=0$$

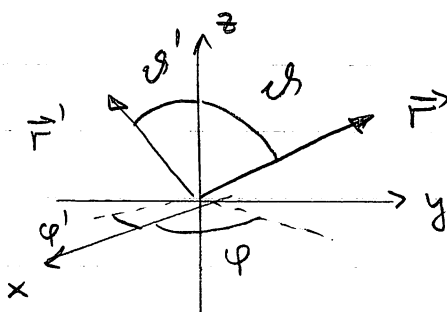
$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$l=1 \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta e^{i\varphi} \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \\ Y_{1-1} = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta e^{-i\varphi} \end{array} \right.$$

$$l=2 \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\vartheta e^{2i\varphi} \\ Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\vartheta \cos\vartheta e^{i\varphi} \\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2\vartheta - \frac{1}{2} \right) \end{array} \right.$$

• erzeugende Funktion

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$



$$r_{<} = \min(r, r')$$

$$r_{>} = \max(r, r')$$

$$\vec{r} = (r, \vartheta, \varphi)$$

$$\vec{r}' = (r', \vartheta', \varphi')$$

Zsg.

$$\Delta \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \phi - \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \phi$$

$$\text{mit } \Delta_{\Omega} \phi = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\phi_{em}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{u_{\ell}(r)}{r} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

$$u_{\ell}''(r) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u_{\ell}(r)$$

$$\Delta_{\Omega} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

Bem:

• Quantenmechanik $\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2}$$

↓

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \Delta_{\Omega}$$

$$\vec{L}^2 \Leftrightarrow \hbar^2 \Delta_{\Omega}$$