Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 1. *Gradient*

☗ **(a)** Man bestimme den Gradienten von

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1}$$
$$f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4 \tag{2}$$
$$f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4 \tag{3}$$
$$f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z) \tag{4}$$

(b) Die Höhe eines Hügels über der (x, y)-Ebene sei durch die Funktion

$$h(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12) \tag{5}$$

gegeben.

(i) Wo liegt der höchste Punkt des Hügels?

(ii) Wie hoch ist der Hügel?

(iii) An welchem Ort und in welche Richtung ist der Anstieg des Hügels am größten?

(c) Sei $\vec{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Man zeige, dass

$$\vec{\nabla} r^2 = 2\vec{r} \tag{6}$$
$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^2} \tag{7}$$
$$\text{Was ist } \vec{\nabla}(r^n) \text{ ?} \tag{8}$$

Aufgabe 2. *Divergenz*

☗ **(a)** Berechnen Sie die Divergenz folgender Vektorfunktionen

$$\vec{v}_1 = x^2 \vec{e_x} + 3xz^2 \vec{e}_y - 2xz\vec{e}_z \tag{9}$$
$$\vec{v}_2 = xy\vec{e_x} + 2yz\vec{e}_y + 3zx\vec{e}_z \tag{10}$$
$$\vec{v}_3 = y^2 \vec{e_x} + (2xy + z^2)\vec{e}_y + 2yz\vec{e}_z \tag{11}$$

(b) Skizzieren Sie die Vektorfunktion

$$\vec{v} = \frac{\vec{e_r}}{r^2}, \tag{12}$$

und berechnen Sie die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. *Rotation*

♠ **(a)** Man berechne die Rotation der Vektorfunktionen aus der Aufgabe **2 (a)** .

(b) Konstruieren Sie eine nicht konstante Vektorfunktion, deren Divergenz und Rotation überall verschwindet.

Aufgabe 4.

(a) Es seien $\vec{A}$ und $\vec{B}$ zwei Vektorfunktionen. Was ist die Bedeutung von $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$?

(b) Es sei $\hat{r} = \vec{r}/r$. Man bestimme $(\hat{r} \cdot \vec{\nabla})\hat{r}$.