Allgemeine Hinweise: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 8.
Eine Ladung q sei homogen über eine Kugel vom Radius R verteilt.

☗ **(a)** Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und durch Integration der Gl.(1) das skalare Potential $\phi(\vec{r})$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie durch explizites Auswerten der Integrale, dass die beiden Versionen der (elektrostatischen) Energie

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \mathrm{d}^3\vec{r}\,\rho(\vec{r})\,\phi(\vec{r}), \qquad U_2 = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty} \mathrm{d}^3\vec{r}\left[\vec{E}(\vec{r})\right]^2$$

dasselbe Resultat liefern.

Aufgabe 9.
Eine Gesamtladung q sei zwischen $z = -L$ und $z = +L$ auf der z-Achse homogen verteilt (Linienladung).

☗ **(a)** Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ allgemein für beliebiges $\vec{r}$ außerhalb der Ladungsverteilung (in kartesischen Koordinaten).

(b) Was ergibt sich näherungsweise für

(i) einen Punkt auf der z-Achse nahe bei $z = L$,
(ii) einen Punkt in der Nähe von $\vec{r} = 0$,
(iii) einen weit entfernten Punkt?

Geben Sie in Fall **(ii)** auch das elektrostatische Feld an. (Hinweis: $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.)

Aufgabe 10.
Gegeben sei das elektrostatische Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left[1 + \left(1 + \frac{r}{2R}\right)e^{-\frac{r}{R}}\right]$$

☗ **(a)** Berechnen Sie das zu $\phi(\vec{r})$ gehörige elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.

(b) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und die Gesamtladung.

Aufgabe 11.
Berechnen Sie $-\nabla\phi$ und $\Delta\phi$ in sphärischen Polarkoordinaten für die Potentiale

☗
$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{\alpha}{2R}\left[3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\Theta(R - r) + \frac{\alpha}{r}\Theta(r - R)\,, \tag{2}$$

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}\cos\theta\,, \tag{3}$$

$$\phi_3(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^3}x\,. \tag{4}$$

Die Größen α, β und R sind Konstanten und $\vec{r} = (x, y, z)$. $\Theta(x - y)$ ist die Stufenfunktion. Sie ist gleich 1 für $x \geq y$ und gleich 0 für $x < y$.