Elektrodynamik: Übungen **Prof. M. Fleischhauer** **WS 2011/2012**

1. Übungsblatt Abgabe: 21.10.11, 12:00 Uhr

Allgemeine Hinweise: Die mit gekennzeichneten Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind als Hausaufgabe zu bearbeiten und in den dafür vorgesehenen Kästen im 5. Stock, Geb. 46 abzugeben.

Aufgabe 1. *Divergenz*

(a) Berechnen Sie die Divergenz folgender Vektorfunktionen

$$\vec{v}_1 = x^2\vec{e}_x + 3xz^2\vec{e}_y - 2xz\vec{e}_z \tag{1}$$
$$\vec{v}_2 = xy\vec{e}_x + 2yz\vec{e}_y + 3zx\vec{e}_z \tag{2}$$
$$\vec{v}_3 = y^2\vec{e}_x + (2xy + z^2)\vec{e}_y + 2yz\vec{e}_z \tag{3}$$

(b) Skizzieren Sie die Vektorfunktion

$$\vec{v} = \frac{\vec{e}_r}{r^2}, \tag{4}$$

und berechnen Sie die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$.

Aufgabe 2. *Rotation*

(a) Skizzieren Sie die Vektorfunktionen

$$\vec{v}_1 = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y \tag{5}$$
$$\vec{v}_2 = x\vec{e}_y \tag{6}$$
$$\vec{v}_3 = x^2\vec{e}_y \tag{7}$$

und berechnen Sie die Rotation.

(b) Konstruieren Sie eine nicht konstante Vektorfunktion, deren Divergenz und Rotation überall verschwinden.

Aufgabe 3. *Vektoranalysis*

Es seien $\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$ Vektorfunktionen von $\vec{r}$. Zeigen Sie unter Beachtung der Produktregel der Differentiation

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - (\vec{A} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B} + (\vec{B} \times \vec{\nabla}) \times \vec{A} \\ &= \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}, \tag{10}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}). \tag{11}$$

Wenn Ihnen die Verwendung des Levi-Civita'schen Symbols ϵ_{ijk} ($\epsilon_{123} = 1$ und vollständig antisymmetrisch) zur Darstellung des Vektorproduktes in kartesischen Koordinaten geläufig ist, können Sie die obigen Gleichungen auch mit dessen Hilfe ableiten. Benutzen Sie dazu, dass gilt

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{12}$$

wobei vereinbarungsgemäß über doppelt auftretende Indizes summiert wird.