Vorlesungen:

Montag, 7.12.: Eigenzustände des Harmonischen Quantenoszillators.
Mittwoch, 9.12.: Kohärente Zustände. Mehrere Teilchen. Höhere Dimensionen.

Lektüre:

Kapitel über die Verallgemeinerung zu mehreren Freiheitsgraden/Dimensionen. (z.B. Shankar Kap. 10)

Übungen:

Einzureichen bis zum 14.12.2015, 12:00 in Fächer neben 46-594.

14.) Betrachte den Anfangszustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2|0\rangle - |1\rangle + |2\rangle\right)$ in einem harmonischen Oszillator.

a) Berechne die Zeitentwicklung des Zustandes $|\psi(t)\rangle$. Gibt es eine Wiederkehrzeit, in der das System in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt („Revival“)?

b) Berechne $\langle X\rangle(t)$ und $\langle P\rangle(t)$ in diesem Zustand. (Es müssen keine Integrale gelöst werden).

c) Zeige, dass $\langle \dot{X}\rangle(t) = \langle P\rangle(t)/m$ erfüllt ist. Welche Gleichung gilt gemäß Ehrenfest-Theorem für $\langle \dot{P}\rangle(t)$ im harmonischen Oszillator?

15a.) Berechne $\langle n|X|n\rangle$, $\langle n|X^2|n\rangle$, $\langle n|X^3|n\rangle$, $\langle n|X^4|n\rangle$, $\langle n|P|n\rangle$, $\langle n|P^2|n\rangle$, $\langle n|P^3|n\rangle$ und $\langle n|P^4|n\rangle$ für angeregte Zustände im harmonischen Oszillator mit beliebigen n. (Es müssen keine Integrale gelöst werden). Berechne die Matrixelemente $\langle n'|[X,P]|n\rangle$.

b) Berechne mit Hilfe von a) das Produkt der Unschärfen Δx und Δp für beliebige Eigenzustände $|n\rangle$. Was passiert mit zunehmenden n?

c) Zeige mit Hilfe von a), dass für Eigenzustände gilt $\langle V(X)\rangle = \langle P^2\rangle/2m$. Dies entspricht dem Virialsatz in der klassischen Mechanik.

Verständnisfragen

57.) Zeige, dass es für den harmonischen Oszillator einen eindeutigen Grundzustand $|0\rangle$ mit $a|0\rangle = 0$ geben muss. Wie können allgemeine angeregte Zustände $|n\rangle$ aus dem Grundzustand erzeugt werden (ohne Normierung). Beweise, dass es keine anderen gebundenen Eigenzustände des Hamiltonoperators geben kann.

58.) Leite einen allgemeinen Ausdruck für *normierte* angeregte Zustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators her. Was ist die Wirkung von $a^\dagger$ und a auf einen normierten Zustand $|n\rangle$?

59.) Drücke die Operatoren X und P mit Hilfe von $a^\dagger$ und a für den harmonischen Oszillator aus.

60.) Finde einen geeigneten Differentialoperatorausdruck für angeregte Wellenfunktionen $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$ des harmonischen Oszillators. Wie nennt man die resultierenden Polynome?

61.) Erkläre wie man eine Auslenkung und eine Beschleunigung aus dem Grundzustand des harmonischen Oszillators mit Hilfe von Auf- und Absteigeoperatoren ausdrücken kann. Was ist die Definition für einen „kohärenten Zustand"?

62.) Zeige, dass ein kohärenter Zustand in einem harmonischen Oszillator ein Eigenzustand von a ist. Berechne das innere Produkt von zwei kohärenten Zuständen $\langle\alpha|\alpha'\rangle$ und den Energieerwartungswert $\langle\alpha|H|\alpha\rangle$.

63.) Berechne die Zeitentwicklung eines kohärenten Zustands in einem Quantenoszillator. Berechne die Zeitentwicklung der entsprechenden Orts- und Impulserwartungswerte.

64.) Was versteht man unter einem Produktzustand in einem Tensorprodukt von Vektorräumen? Wann ist eine solche Konstruktion sinnvoll/notwendig in der Quantenmechanik? Wann nennt man einen Zustand separabel?