Vorlesungen:

Montag, 30.11.: Potentialtopf.
Mittwoch, 2.12.: Der harmonische Quantenoszillator.

Lektüre:

Kapitel über gebundene Zustände in 1D (z.B. Shankar Kap. 5.2, 5.6, 7.1, 7.2)

Übungen: Einzureichen bis zum 7.12.2015, 10:00 in Fächer neben 46-594.

12a) Nehme an, dass ein beliebiger Hamiltonoperator H einen Zustand $|E_0\rangle$ mit der kleinsten Eigenenergie E_0 hat (der sogenannte Grundzustand). Zeige, dass der Erwartungswert von H in einem beliebigen Zustand nach unten durch die Grundzustandsenergie beschränkt ist $\langle\hat{H}\rangle \geq E_0$.

b) Betrachte einen Hamiltonoperator in einer Dimension $\hat{H}=\frac{\hat{P}^2}{2m}+V(\hat{X})$ mit nach unten beschränkten Potential $V(x)\geq V_0, \forall x$. Zeige, dass in diesem Fall in einem beliebigen Zustand für den Energieerwartungswert gilt $\langle\hat{H}\rangle \geq V_0$.

c) Zeige, dass für eine Gauss-Wellenfunktion $\psi_\alpha(x)=\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}}\exp(-\alpha x^2/2)$ durch geeignete Wahl von α der Erwartungswert von $\hat{H}=\frac{\hat{P}^2}{2m}+V(\hat{X})$ mit beliebigem attraktiven Potential $V(x)<0$ immer negativ gemacht werden kann.

d) Argumentiere, dass aus 12a-c folgt, dass es in einer Dimension immer einen gebundenen Grundzustand mit $0>E_0\geq V_0$ gibt, falls das Potential attraktiv ist $V_0\leq V(x)\leq 0$ mit $\lim_{|x|\to\infty} V(x)=0$ und $V(x)<0$ in einem endlichen Bereich.

13) Betrachte einen Potentialtopf mit $V(x)=-V_0$ für $|x|<L/2$ und $V(x)=0$ für $|x|\geq L/2$.

a) Stelle eine allgemeine Form für gebundene Eigenzustände $E<0$ auf und argumentiere, dass sie immer symmetrisch oder antisymmetrisch unter Spiegelung um $x=0$ sein müssen.

b) Bestimme die Quantisierungsbedingungen für den Wellenvektor k innerhalb und den exponentiellen Abfall $\varkappa$ außerhalb des Topfes für symmetrische und antisymmetrische Wellenfunktionen.

c) Was ist die Bedingung für $V_0(L)$, dass es eine gebundene antisymmetrische Lösung gibt?

d) Betrachte den Fall, dass $V_0=U/L$ im Grenzwert $L\to 0$ ($U>0$ beliebig). Was ist die Energie des Grundzustandes? Skizziere die Wellenfunktion. Zeige, dass die Wellenfunktion eine Unstetigkeit in der 1. Ableitung besitzt, die gerade einer δ-Funktion des Potentials in der Schrödinger Gleichung entspricht.

Verständnisfragen

49.) Betrachte das Kastenpotential $V(x) = \begin{cases} V_o & |x| \geq L/2 \\ 0 & |x| < L/2 \end{cases}$. Welche Symmetrie hat der Hamiltonoperator und was bedeutet dies für die Eigenfunktionen? Welche Lösungen für die Differentialgleichung gibt es in den verschiedenen Bereichen? Leite einen Ausdruck für die Eigenzustände und Eigenenergien im Grenzwert $V_0 \to \infty$ her. Wie kann man einen beliebigen Zustand in der Eigenbasis ausdrücken?

50.) Was versteht man unter einer Lokalisierungsenergie? Leite eine untere Grenze zur Abschätzung dieser Energie her.

51.) Betrachte einen Hamiltonoperator mit einem quadratischen Potential (harmonischer Oszillator). Mache eine geeignete Reskalierung der Orts- und Impulsoperatoren, so dass der Hamiltonoperator die gleiche Form in der Orts- und Impulsbasis annimmt. Welche Funktion hat die gleiche Form als Funktion der fouriertransformierten Variablen?

52.) Was versteht man unter einer kanonischen Transformation?

53.) Stelle die Differentialgleichung für die Wellenfunktion in der reskalierten Ortsbasis für ein quadratisches Potential auf (harmonischer Oszillator). Zeige, dass eine Gaussfunktion die Eigenwertgleichung erfüllt. Was ist die Eigenenergie?

54.) Welche Kommutatorrelation muss für einen Operator gelten, der die Energie verschiebt.

55.) Drücke den Hamilton Operator für den harmonischen Oszillator durch geeignete kanonisch reskalierte Variablen aus und finde einen allgemeinen Ausdruck für einen Operator *a* für den gilt $[\hat{a}, \hat{H}] = -\varepsilon\hat{a}$. Definiere Auf- und Absteigeoperatoren („Erzeuger" und „Vernichter").

56.) Benutze die Auf- und Absteigeoperatoren („Erzeuger" und „Vernichter") für einen harmonischen Oszillator um $a^\dagger a$ und $[a,a^\dagger]$ zu berechnen. Drücke den Hamiltonoperator mit Hilfe dieser Operatoren aus.