Vorlesungen:

Montag, 23.11.: Einfache Probleme in einer Dimension.
Mittwoch, 25.11.: Gebundene Zustände in einer Dimension.

Lektüre:

Kapitel über Potentialtöpfe und Potentialstufen in einer Dimension.
(z.B. Shankar Kap. 5.)

Übungen:

Einzureichen bis 10:00, 30.11.2015 in Fächer neben 46-594. Jeweils 10 Punkte.

10.) Betrachte ein Wellenpaket, das durch die Darstellung $|\psi\rangle = \int \psi(x)|x\rangle dx$ in der Ortsbasis mit der Funktion $\psi(x) = c\exp\left(ip_0 x/\hbar - x^2/2\Delta\right)$ gegeben ist.

a) Bestimme *c*, so dass $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

b) Berechne die Darstellung $\tilde{\psi}(p)$ in der Impulsbasis und berechne $\langle\hat{P}\rangle$.

c) Die Zeitentwicklung für den Fall $V(x) = 0$ (freies Teilchen) ergibt für Impulszustände $|p(t)\rangle = \exp(-ip^2 t/2m\hbar)|p\rangle$. Was ist dementsprechend $|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt/\hbar)|\psi\rangle$ in der Impulsbasis?

d) Stelle $|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt/\hbar)|\psi\rangle$ in der Ortsbasis dar und bestimme $\langle\hat{X}\rangle(t)$? Vergleiche mit dem Ehrenfesttheorem.

11a) Zeige, dass die Matrixelemente des Differentialoperators durch die Delta-Funktion dargestellt werden können $\langle x|D|x'\rangle = \dfrac{\partial\delta(x-x')}{\partial x} = \delta(x-x')\dfrac{\partial}{\partial x'}$ (durch Anwendung auf eine Testfunktion).

b) Finde einen Ausdruck für die „Matrixelemente" des Ortsoperators $\langle p'|\hat{X}|p\rangle$ in der Impulsbasis. Wie kann dementsprechend eine infinitesimale Verschiebung eines Impulses mit Hilfe des Ortsoperators erreicht werden? Was ist ein geeigneter Ausdruck für einen „Boostoperator", der alle Impulse um einen endlichen Wert Δp verschiebt?

Verständnisfragen

39.) Zeige, dass $[\hat{X},\hat{P}] = i\hbar\hat{I}$. Was ist die Heisenbergsche Unschärferelation?

40.) Was ist der Hamiltonoperator für ein Teilchen in einem allgemeinen eindimensionalen Potential? Benutze eine Entwicklung in der Ortsbasis, um die entsprechende Differentialgleichung für die Wellenfunktion herzuleiten.

41.) Diskutiere das Eigenwertproblem für ein freies Teilchens ($V(x)$=0). Was ist der Hamiltonoperator? Was sind die Eigenzustände? Gibt es eine Entartung? Welche Symmetrien gibt es? Was gilt für die Zeitentwicklung der Eigenzustände und der Erwartungswerte von X und P.

42.) Leite eine Kontinuitätsgleichung für die Zeitableitung der Wahrscheinlichkeit ein Teilchen an einem Ort x zu finden her. Was ist dementsprechend ein geeigneter Ausdruck für einen Wahrscheinlichkeitsstrom? Berechne den Wahrscheinlichkeitsstrom für eine Überlagerung von zwei ebenen Wellen mit entgegengesetzten Impulsen.

43.) Betrachte ein Stufenpotential $V(x) = 0$ für $x < 0$ und $V(x) = V_0$ für $x \geq 0$. Zeige ausführlich wie man die Eigenfunktionen der Schrödingergleichung herleiten kann für den Fall $E>V_0$. Was gilt für den Reflektionskoeffizienten? Was passiert mit der Wellenfunktion an Stellen an denen das Potential $V(x)$ eine endliche Unstetigkeit besitzt?

44.) Betrachte ein beliebiges Potential, das konstant ist außerhalb eines endlichen Bereiches (z.B. $V(x) = 0$ für $x < -a$ und $V(x) = V_0$ für $x \geq a$). Argumentiere, dass die Koeffizienten (C,D) für ungebundene links/rechts-Läufer $x>a$ mit den Koeffizienten (A,B) für $x<-a$ durch eine Matrix-Gleichung verbunden sind. Was muss dann für die Matrixelemente gelten?

45.) Betrachte ein Stufenpotential $V(x) = 0$ für $x < 0$ und $V(x) = V_0$ für $x \geq 0$. Zeige ausführlich wie man die Eigenfunktionen der Schrödingergleichung herleiten kann für den Fall $E<V_0$.

46.) Was versteht man unter gebundenen Zuständen?

47.) Zeige, dass gebundene Zustände in einer Dimension nicht entartet sind.

48.) Zeige, dass Energie-Eigenfunktionen reell gewählt werden können.