

Vorlesungen:

Montag, 18.1.: Atome mit mehreren Elektronen (Hartree). Addition von Drehimpulsen.

Mittwoch, 20.1.: Beschreibung von magnetischen Feldern. Konstantes Magnetfeld. Eichinvarianz.

Lektüre:

Kapitel über Elektromagnetismus und Spin, (z.B. Shankar Kap. 2.2, 14, und 18.4.)

Übungen: Einzureichen bis zum 25.1.2016 um 10:00.

21) (15 Punkte) Betrachte den isotropen harmonischen Oszillator in drei Dimensionen.

a) Wie in der Vorlesung argumentiert, ist der erste angeregte Zustand dreifach entartet und entspricht Zuständen mit Gesamtdrehimpuls $l=1$. Die drei Wellenfunktionen in kartesischen Koordinaten entsprechen dem ersten angeregten Zustand des ein-dimensionalen Oszillators in jeweils eine (x,y,z)-Richtung und dem Grundzustand in den anderen beiden Richtungen. Drücke diese Wellenfunktionen in Kugelkoordinaten aus und mache eine Multipolentwicklung mit Hilfe der entsprechenden Kugelflächenfunktionen (insgesamt 9 Winkelintegrale, wobei einige verschwinden). Was sind die entsprechenden Eigenfunktionen, die gleichzeitig auch Eigenzustände für den Drehimpuls sind mit Quantenzahlen $l=1$, $m=-1,0,1$. Stelle die Eigenfunktionen sowohl in kartesischen Koordinaten als auch in Kugelkoordinaten dar.

b) Benutze den Ansatz $\psi(r, \theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \exp(-M\omega r^2/2\hbar)g(r)/r$ für allgemeine Eigenfunktionen (M =Masse). Zeige dass für $g(r)$ folgende Differentialgleichung gilt:

$$-g'' + \frac{2M\omega r}{\hbar} g' + \frac{M\omega}{\hbar} g + \frac{l(l+1)}{r^2} g = \frac{2ME}{\hbar^2} g.$$

c) Mache einen Polynomansatz $g(r) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^{k+l+1}$ und leite durch Einsetzen eine Rekursionsformel für die Koeffizienten C_k her.

d) Zeige, dass eine Quantisierungsbedingung für die Energie gelten muss, falls das Polynom von endlicher Ordnung ist.

e) Bestimme das resultierende Spektrum, die Entartung und die Drehimpuls-Quantenzahlen aus der Quantisierungsbedingung.

22a) (10 Punkte) Zeige, dass für Eigenzustände des Wasserstoffatoms gilt:

$\langle T \rangle := \langle P^2 \rangle / 2m = -\langle V \rangle / 2$ (das ist der sogenannte Virialsatz. Hinweis: Benutze das Ehrenfest Theorem für $\vec{R} \cdot \vec{P}$)

b) Zeige, dass aus dem Virialsatz und den Eigenenergien folgt, dass $\langle 1/r \rangle = 1/(n^2 a_0)$.

c) Zeige, dass für Erwartungswerte von Operatoren Ω mit positiven Eigenwerten gilt $\langle \Omega \rangle \geq \langle 1/\Omega \rangle^{-1}$. Hinweis: Betrachte den Operator $(\sqrt{\langle \Omega \rangle} / \Omega - 1)^2$. Somit gilt $\langle r \rangle \geq n^2 a_0$

Verständnisfragen

- 99.) Wie kann man die Lösung für das Wasserstoffatom für Atome mit vielen Elektronen selbstkonsistent verallgemeinern (gemäß Hartree)? Was bleibt gleich und was ändert sich? Erkläre die Verbindung mit dem Periodensystem.
- 100.) Was versteht man unter der Feinstrukturkonstante und der Comptonwellenlänge? Was ist die physikalische Bedeutung der Comptonwellenlänge?
- 101.) Was versteht man unter der Addition von Drehimpulsen? Wann ist dieses Konzept wichtig? Beschreibe, welche Quantenzahlen in der Gesamtspinbasis und in der Basis von Produktzuständen der einzelnen Spins benutzt werden.
- 102.) Leite die Gesamtspinbasis von zwei Spin-1/2 Teilchen als Überlagerung der Produktzustände der einzelnen Teilchen her.
- 103.) Was sind Clebsch-Gordan Koeffizienten und die Clebsch-Gordan Zerlegung?
- 104.) Beschreibe wie man im Allgemeinen die Clebsch-Gordan Koeffizienten bei der Addition von zwei Drehimpulsen l_1 und l_2 bestimmen kann.
- 105.) Beschreibe wie in der klassischen Mechanik die Dynamik eines Teilchens mit den elektromagnetischen Potentialen beschrieben wird (Lagrange Formalismus). Was ist demnach der analoge quantenmechanische Hamiltonoperator? Was ist der Unterschied zwischen dem kinetischen und dem konjugierten Impuls?
- 106.) Was macht eine Eichtransformation des Vektorpotentials in der Quantenmechanik? Kann dies die Lösung der Schrödingergleichung (Energieeigenwerte bzw. Wellenfunktionen) beeinflussen? Was passiert mit dem kinetischen Impuls?
- 107.) Was ist das Vektorpotential für ein konstantes Magnetfeld in z -Richtung in der zirkulären und in der Landau Eichung? Leite den Hamiltonoperator für ein geladenes Teilchen in der zirkulären Eichung als Funktion von Orts-, Impuls- und Drehimpulsoperatoren her.
- 108.) Was ist der energetisch wichtigste Effekt des Magnetfeldes auf ein geladenes Teilchen? Durch welchen Term im Hamiltonoperator wird dieser Effekt beschrieben?
- 109.) Wie kommt ein magnetischer Dipol in der Quantenmechanik zustande? Was ist das gyromagnetische Verhältnis?
- 110.) Was versteht man unter dem „orbitalen“ Zeemaneffekt für geladene Teilchen in rotationsinvarianten Systemen mit einem Magnetfeld? Welche Entartung wird aufgehoben und wie groß ist die Energieaufspaltung? Was passiert mit den ursprünglichen Lösungen?
- 111.) Beschreibe die Zeitentwicklung in einem Magnetfeld unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung B^2 im Hamiltonoperator. Erkläre den Zusammenhang mit der Rotation bzw. Präzession.