

**Vorlesungen:**

Montag, 11.1.: Orbitaler Drehimpuls.

Mittwoch, 13.1.: Das Wasserstoffatom.

**Lektüre:**

Kapitel über das H-Atom (z.B. Shankar Kap. 13.)

**Übungen:** Einzureichen bis 10:00 am 18.1.2016.

18.) Von voriger Woche:

Betrachte ein Teilchen, das in einem zweidimensionalen kreisförmigen „Quantenpunkt“ eingeschlossen ist (d.h.  $V(r)=0$  für  $r < R$  und  $V(r)=\infty$  für  $r \geq R$ ). Zeige, dass die Schrödingergleichung innerhalb des Quantenpunktes in radialer Richtung der *Besselschen Differentialgleichung* entspricht (siehe ein Mathe-Buch oder Wikipedia). Physikalische Lösungen der Wellenfunktion müssen am Rand des Quantenpunktes  $r=R$  verschwinden und innerhalb endlich sein. Wie hängen dementsprechend die Nullstellen der Besselfunktionen erster Gattung mit den Eigenenergien zusammen? Wie hängt die Ordnung der Besselfunktion mit dem Drehimpuls zusammen?

20a) Was besagt die Unschärferelation für  $\Delta l_x \cdot \Delta l_y$  in Drehimpuls-Eigenzuständen  $|l, l_z\rangle$  für beliebige  $l, l_z$  gemäß der Kommutatorrelation?

b) Zeige für beliebige  $l, l_z$ , dass für die Drehimpuls-Eigenzustände  $|l, l_z\rangle$  gilt:  
 $\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$ .

c) Berechne  $\langle l, l_z | L_x^2 | l, l_z \rangle$  für beliebige  $l, l_z$ . Argumentiere dass  $\langle l, l_z | L_x^2 | l, l_z \rangle = \langle l, l_z | L_y^2 | l, l_z \rangle$ . Berechne  $\Delta l_x \cdot \Delta l_y$  für beliebige  $l, l_z$ . Wann gilt also das Gleichheitszeichen in der Unschärferelation?

# Verständnisfragen

- 87.) Was sind die Spin-1/2 Drehimpulsmatrizen  $\vec{S}$ ? Was sind die Pauli-Matrizen  $\vec{\sigma}$ ?
- 88.) Welche Kommutator- und Antikommutatorregeln gelten für die Pauli-Matrizen?
- 89.) Argumentiere, dass jeder bilineare Ausdruck von Paulimatrizen wieder auf einen linearen Ausdruck (inklusive Identität) zurückgeführt werden kann. Gebe eine entsprechende mathematische Formel an. Was ist die Spur von allgemeinen bilinearen Produkten der Pauli-Matrizen  $\sigma_i \sigma_j$ ?
- 90.) Zeige, dass eine Drehung eines Spin-1/2 Drehimpulses durch eine einfache lineare Form in Paulimatrizen angegeben werden kann.
- 91.) Wie ist der Eigenzustand für einen Spin in eine beliebige Richtung definiert? Argumentiere, dass jedem beliebigen Spin-1/2 Zustand eine eindeutige Richtung zugewiesen werden kann.
- 92.) Argumentiere, dass in der Multipolentwicklung der Lösung eines Problems mit Drehimpulserhaltung jeder einzelne Term separat eine Lösung darstellt.
- 93.) Was ist der Ausdruck der kinetischen Energie in drei Dimensionen als Ableitung der Radialkomponente  $r$  der Kugelkoordinaten und der Drehimpulsoperatoren?
- 94.) Mache einen Separationsansatz für die Wellenfunktion  $\psi(\vec{r})$  für allgemeine rotationsinvariante Probleme und leite eine effektive eindimensionale Differentialgleichung für die Radialkomponente  $f(r)$  her. Zeige, dass sich die Differentialgleichung mit dem Ansatz  $f(r)=u(r)/r$  vereinfacht. Was sind die Gemeinsamkeiten/Unterschiede der Differentialgleichung zu der Schrödingergleichung in einer Dimension?
- 95.) Argumentiere, dass die Lösung für die Radialkomponente  $f(r)=u(r)/r$  in rotationsinvarianten Problemen am Ursprung ein typisches Potenzverhalten zeigen muss, falls das Potential langsamer als  $1/r^2$  divergiert.
- 96.) Was gilt für die Energien und das asymptotische Verhalten von gebundenen und ungebundenen Eigenzuständen für ein radialsymmetrisches Potential, das einen endlichen Wert für  $r \rightarrow \infty$  annimmt?
- 97.) Was ist die Differentialgleichung für die Radialkomponente der Wellenfunktion im Wasserstoffatom? Mache einen geeigneten Ansatz für die Wellenfunktion und zeige, dass im Radialanteil ein Produkt von einer Polynomfunktion mit einer Exponentialfunktion zu einer Rekursionsformel für die Koeffizienten im Polynom führt. Wie folgt daraus eine Quantisierungsbedingung?
- 98.) Was ist die Quantisierungsbedingung im Wasserstoffatom für die exponentielle Abklingkonstante  $\kappa$  in der Wellenfunktion. Was folgt daraus für die Energieeigenwerte? Was sind die möglichen Quantenzahlen und was ist die Entartung für jeden Energieeigenwert?
- 98.) Was ist ein Ryberg  $Ry$  und was ist der Bohrsche Radius  $a_0$ ?